

Musterlösung zur Aufgabe A1.1

a) Der komplexe Widerstand der Kapazität C ist gleich $1/(j\omega C)$, wobei $\omega = 2\pi f$ die so genannte Kreisfrequenz angibt. Der Frequenzgang lässt sich nach dem Spannungsteilerprinzip berechnen:

$$H_A(f) = \frac{Y_A(f)}{X_A(f)} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot R \cdot C}$$

Wegen $H_A(f=0) = 1$ kann dies kein Hochpass sein; vielmehr handelt es sich um einen Tiefpass. Bei niedrigen Frequenzen ist der Blindwiderstand der Kapazität sehr groß und es gilt $y_A(t) \approx x_A(t)$. Dagegen wirkt der Kondensator bei sehr hohen Frequenzen wie ein Kurzschluss und es ist $y_A(t) \approx 0$.

b) Durch Koeffizientenvergleich zwischen $H_{TP}(f)$ auf der Angabenseite und $H_A(f)$ gemäß a) erhält man:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \Omega \cdot 0.637 \cdot 10^{-6} \text{ s}/\Omega} \approx \underline{5 \text{ kHz}}$$

c) Der Amplitudengang lautet:

$$|H_A(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}$$

Für $f=f_0$ erhält man den Zahlenwert $0.5^{-0.5} \approx \underline{0.707}$ und für $f=2f_0$ näherungsweise den Wert 0.447.

d) Die Ausgangsleistung kann nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$P_y = P_x \cdot |H_A(f=f_x)|^2$$

Für $f_x=f_0$ ist $P_y = P_x/2 \approx \underline{5 \text{ mW}}$, also die halbe Leistung. In logarithmischer Darstellung lautet diese Beziehung:

$$10 \cdot \lg \frac{P_x(f_0)}{P_y(f_0)} = 3 \text{ dB}$$

Deshalb ist für f_0 auch die Bezeichnung 3dB-Grenzfrequenz üblich. Dagegen erhält man für $f_x=2f_0$ einen kleineren Wert: $P_y = P_x/5 \approx \underline{2 \text{ mW}}$.

e) Analog zur Teilaufgabe a) gilt:

$$H_B(f) = \frac{Y_B(f)}{X_B(f)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j2\pi \cdot f \cdot L/R}{1 + j2\pi \cdot f \cdot L/R}$$

Unter Verwendung der Bezugsfrequenz $f_0 = R/(2\pi L)$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$H_B(f) = \frac{j \cdot f/f_0}{1 + j \cdot f/f_0} \Rightarrow |H_B(f)| = \frac{|f/f_0|}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}$$

Daraus erhält man die Zahlenwerte:

$$|H_B(f=0)| \approx \underline{0}, \quad |H_B(f_0)| \approx \underline{0.707}, \quad |H_B(2f_0)| \approx \underline{0.894}, \quad |H_B(f \rightarrow \infty)| \approx \underline{1}$$

Der Vierpol B ist demzufolge ein Hochpass.

f) Aus obiger Definition der Bezugsfrequenz folgt:

$$L = \frac{R}{2\pi \cdot f_0} = \frac{50 \Omega}{2\pi \cdot 5000 \text{ Hz}} = 1.59 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega\text{s} = \underline{\underline{1.59 \text{ mH}}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.1

a) Der Amplitudengang des Tiefpasses erster Ordnung lautet:

$$|H_1(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}.$$

Damit erhält man den Dämpfungsverlauf in Neper:

$$\begin{aligned} a_1(f) &= \ln \frac{1}{|H_1(f)|} = 1/2 \cdot \ln [1 + (f/f_0)^2] \\ \Rightarrow a_1(f = f_0) &= 0.34657 \text{ Np}, \quad a_1(f = 2f_0) = 0.804719 \text{ Np}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden dB-Werte erhält man durch Multiplikation mit $1/0.115 = 8.68589$ und führt zu den Ergebnissen 3.01 dB \approx 3 dB ($f = f_0$) und 6.99 dB ($f = 2f_0$). Beim Tiefpass erster Ordnung beträgt somit die 3dB-Grenzfrequenz $f_G = f_0$.

b) Der Frequenzgang $H_1(f)$ kann auch nach Real- und Imaginärteil getrennt dargestellt werden:

$$H_1(f) = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2} - j \cdot \frac{f/f_0}{1 + (f/f_0)^2}.$$

Damit ergibt sich für den Phasengang:

$$b_1(f) = -\arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctan \frac{f}{f_0}.$$

Für $f = f_0$ erhält man $\arctan(1) = \pi/4 = \underline{0.786 \text{ rad}}$, für $f = 2f_0$ den Wert $\arctan(2) = \underline{1.108 \text{ rad}}$.

c) Für den Amplitudengang eines Tiefpasses n -ter Ordnung gilt:

$$|H_n(f)| = |H_1(f)|^n.$$

Bei logarithmierter Dämpfungsfunktion wird aus der n -fachen Multiplikation die n -fache Summe:

$$a_n(f) = n \cdot a_1(f) = n/2 \cdot \ln [1 + (f/f_0)^2]$$

und speziell für den Tiefpass zweiter Ordnung:

$$a_2(f) = \ln [1 + (f/f_0)^2] = 2 \cdot a_1(f).$$

Die dB-Werte lauten nun 6.02 dB \approx 6 dB ($f = \pm f_0$) und 13.98 dB (für $f = \pm 2f_0$). Damit ist offensichtlich, dass für $n > 1$ der Parameter f_0 nicht mehr die 3 dB-Grenzfrequenz angibt. Vielmehr gilt für $n = 2$: $f_G^2 = f_0^2/2$.

d) Auch bezüglich der Phasenfunktion gilt:

$$b_n(f) = n \cdot b_1(f), \quad b_2(f) = 2 \cdot b_1(f).$$

Bei einem Tiefpass zweiter Ordnung sind somit alle Phasenwerte zwischen $\pm\pi$ möglich. Insbesondere ist $b_2(f = f_0) = \pi/2 = \underline{1.571 \text{ rad}}$ und $b_2(f = 2f_0) = 2.216 \text{ rad}$. Da die Phase eine ungerade Funktion ist, gilt hier: $b_2(f = -2f_0) = \underline{-2.216 \text{ rad}}$.

Musterlösung zur Aufgabe A1.2

a) Für den Gleichsignalübertragungsfaktor gilt:

$$K = H(f = 0) = e^{-\alpha_0 \cdot l} = e^{-0.00162 \cdot 5} \approx \underline{0.992}.$$

b) Mit $a_0 = \alpha_0 \cdot l$ müsste folgende Gleichung erfüllt sein:

$$e^{-a_0} \geq 0.97 \Rightarrow a_0 < \ln \frac{1}{0.97} \approx 0.0305 \text{ Np}.$$

Damit erhält man für die maximale Länge $l_{\max} = 0.0305 \text{ Np} / 0.00162 \text{ Np/km} \approx \underline{18.8 \text{ km}}$.

c) Wegen $\beta_2 = \alpha_2$ und der angegebenen Beziehung $1 + j = (2j)^{0.5}$ kann für den Frequenzgang auch geschrieben werden:

$$H(f) = K \cdot e^{-\sqrt{2j \cdot f \cdot \alpha_2^2 \cdot l^2}} = K \cdot e^{-\sqrt{2j \cdot f / f_0}}.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der vorne angegebenen Gleichung erhält man:

$$\frac{1}{f_0} = \alpha_2^2 \cdot l^2 = \left(\frac{0.272}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \right)^2 \cdot (5 \text{ km})^2 = \frac{1.855}{\text{MHz}} \Rightarrow f_0 = \underline{0.540 \text{ MHz}}.$$

d) Für den Frequenzgang gilt:

$$\begin{aligned} H(f) &= K \cdot e^{-\sqrt{2j \cdot f / f_0}} = K \cdot e^{-\sqrt{f / f_0}} \cdot e^{-j\sqrt{f / f_0}} \\ &\Rightarrow |H(f)|^2 = K^2 \cdot e^{-2\sqrt{f / f_0}}. \end{aligned}$$

Für $f = f_0$ erhält man hierfür $e^{-2} \approx 0.135$. Daraus folgt weiter:

$$P_y = P_x \cdot |H(f = f_0)|^2 \approx \underline{135 \text{ mW}}.$$

e) In diesem Fall gilt:

$$P_y = P_x \cdot e^{-2\sqrt{10/0.54}} \approx P_x \cdot e^{-8.6} \approx \underline{0.184 \text{ mW}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.2

a) Bei einem LZI-System gilt $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$. Daher ist es nicht möglich, dass im Ausgangssignal ein Anteil mit $3f_0$ vorhanden ist, wenn ein solcher im Eingangssignal fehlt. Das heißt: Es liegt hier kein LZI-System vor und dementsprechend ist auch kein Frequenzgang angebar. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 3.

b) Aufgrund der angegebenen Zahlenwerte für $A_y(f_0)$ kann von einem Bandpass ausgegangen werden.

c) Mit $A_x = 2 \text{ V}$ und $\varphi_x = 90^\circ$ (Sinusfunktion) erhält man für $f_0 = f_3 = 3 \text{ kHz}$:

$$H_B(f_3) = \frac{A_y}{A_x} \cdot e^{-j(\varphi_x - \varphi_y)} = \frac{1 \text{ V}}{2 \text{ V}} \cdot e^{-j(90^\circ - 90^\circ)} = 0.5.$$

Somit ergeben sich für $f_0 = 3 \text{ kHz}$ die Werte $a_B \approx 0.693 \text{ Np}$ und $b_B = 0 \text{ (Grad)}$.

d) In analoger Weise kann der Frequenzgang bei $f_0 = f_2 = 2 \text{ kHz}$ ermittelt werden:

$$H_B(f_2) = \frac{0.8 \text{ V}}{2 \text{ V}} \cdot e^{-j(90^\circ - 70^\circ)} = 0.4 \cdot e^{-j20^\circ}.$$

Damit gilt für $f_0 = f_2 = 2 \text{ kHz}$: $a_B(f_2) \approx 0.916 \text{ Np}$ und $b_B(f_2) = 20^\circ$.

Bei $f = -2 \text{ kHz}$ gilt der gleiche Dämpfungswert. Die Phase hat jedoch das umgekehrte Vorzeichen. Also ist $b_B(-f_2) = -20^\circ$.

Musterlösung zur Aufgabe A1.3

a) Das Ausgangssignal $y_1(t)$ ist 0, solange das Eingangssignal $x_1(t) = 0$ ist. Das bedeutet, dass hier ein kausales System vorliegt. Zum gleichen Ergebnis hätte man allein durch die Aussage „das Ausgangssignal wurde gemessen“ kommen können. Nur kausale Systeme sind realisierbar und nur bei realisierbaren Systemen kann etwas gemessen werden.

Das Eingangssignal $x_1(t)$ kann für sehr große Zeiten ($t \gg 0$) als Gleichsignal interpretiert werden. Wäre $H(f)$ ein Hochpass, dann müsste $y_1(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. Das heißt: $H(f)$ stellt einen Tiefpass dar. Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

b) Der Gleichsignalübertragungsfaktor kann aus den Signalen $x_1(t)$ und $y_1(t)$ abgelesen werden, wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist:

$$H(f = 0) = \frac{y_1(t \rightarrow \infty)}{x_1(t \rightarrow \infty)} = \frac{1 \text{ V}}{4 \text{ V}} \equiv \underline{0.25}.$$

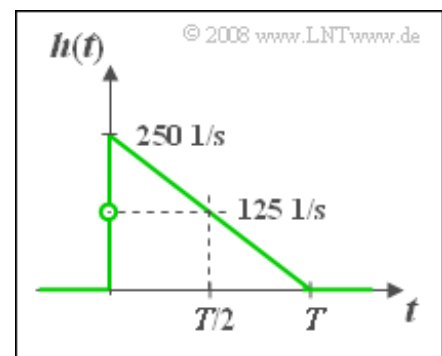
c) Die Sprungantwort $\sigma(t)$ ist gleich dem Ausgangssignal $y(t)$, wenn am Eingang $x(t) = \gamma(t)$ anliegen würde. Wegen $x_1(t) = 4V \cdot \gamma(t)$ gilt somit im Bereich von 0 bis $T = 2$ ms:

$$\sigma(t) = \frac{y_1(t)}{4 \text{ V}} = 0.5 \cdot (t/T - 0.5(t/T)^2).$$

Zum Zeitpunkt $t = T = 2$ ms erreicht die Sprungantwort ihren Endwert 0.25. Für $t = T/2 = 1$ ms ergibt sich der Zahlenwert $3/16 \equiv \underline{0.1875}$. Beachten Sie bitte, dass die Sprungantwort $\sigma(t)$ ebenso wie die Sprungfunktion $\gamma(t)$ keine Einheit besitzt.

d) Die Sprungantwort $\sigma(t)$ ist das Integral über die Impulsantwort $h(t)$. Damit ergibt sich $h(t)$ aus $\sigma(t)$ durch Differentiation nach der Zeit. Im Bereich $0 < t < T$ gilt deshalb:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d\sigma(t)}{dt} = \\ &= 0.5 \cdot \left(\frac{1}{T} - 0.5 \cdot \frac{2t}{T^2} \right) = \frac{0.5}{T} \cdot \left(1 - \frac{t}{T} \right) \\ \Rightarrow h(t = 1 \text{ ms}) &= h(t = T/2) = \frac{0.25}{T} = \underline{125 \cdot 1/s}, \\ \Rightarrow h(t = 2 \text{ ms}) &= h(t = T) \equiv \underline{0}. \end{aligned}$$



Für $t < 0$ und $t \geq T$ ist $h(t)$ stets 0. Der Wert $h(t = 0)$ bei exakt $t = 0$ muss aus dem Mittelwert zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert ermittelt werden:

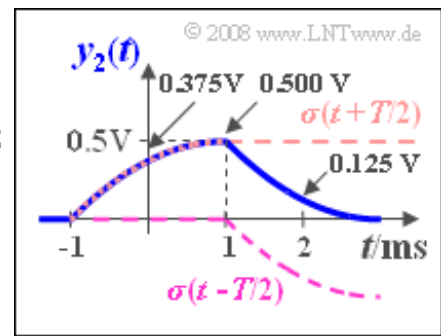
$$h(t = 0) = \frac{1}{2} \cdot \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(-\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(+\varepsilon) \right] = \left[0 + \frac{0.5}{T} \right] = \frac{0.25}{T} = 250 \cdot 1/s.$$

e) Der Rechteckimpuls $x_2(t)$ kann auch als die Differenz zweier um $\pm T/2$ verschobener Sprünge dargestellt werden:

$$x_2(t) = A \cdot \left[\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) - \gamma\left(t - \frac{T}{2}\right) \right].$$

Damit ist das Ausgangssignal gleich der Differenz zweier um $\pm T/2$ verschobener Sprungantworten:

$$y_2(t) = A \cdot \left[\sigma\left(t + \frac{T}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{T}{2}\right) \right].$$



Für $t = -T/2 = -1\text{ms}$ gilt $y_2(t) \equiv 0$. Für die weiteren Zeitpunkte $t = 0$, $t = T/2 = 1\text{ ms}$ sowie $t = T = 2\text{ ms}$ erhält man (siehe Grafik):

$$y_2(t = 0) = A \cdot [\sigma(0.5 \cdot T) - \sigma(-0.5 \cdot T)] = 2\text{ V} \cdot [0.1875 - 0] \equiv \underline{0.375\text{ V}},$$

$$y_2(t = T/2) = y_2(t = 1\text{ ms}) = A \cdot [\sigma(T) - \sigma(0)] = 2\text{ V} \cdot [0.25 - 0] \equiv \underline{0.5\text{ V}},$$

$$y_2(t = T) = A \cdot [\sigma(1.5 \cdot T) - \sigma(0.5 \cdot T)] = 2\text{ V} \cdot [0.25 - 0.1875] \equiv \underline{0.125\text{ V}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.3

a) Der Frequenzgang $H(f)$ ist die Fouriertransformierte von $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(j2\pi f + 1/T)t} dt.$$

Die Integration führt zum Ergebnis:

$$H(f) = \left[\frac{-1/T}{j2\pi f + 1/T} \cdot e^{-(j2\pi f + 1/T)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi f T}.$$

Bei der Frequenz $f = 0$ hat der Frequenzgang den Wert 1.

b) Dieser Frequenzgang kann mit Real- und Imaginärteil auch wie folgt geschrieben werden:

$$H(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f T)^2} - j \cdot \frac{2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2}.$$

Die Impulsantwort an der Stelle $t = 0$ ist gleich dem Integral über $H(f)$. Da der Imaginärteil ungerade ist, muss nur über den Realteil integriert werden. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft erhält man:

$$h(t = 0) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f T)^2} df = \frac{1}{\pi T} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

Unter Benutzung des angegebenen bestimmten Integrals mit dem Resultat $\pi/2$ ergibt sich:

$$h(t = 0) = \frac{1}{2T} = \underline{500 \cdot 1/s}.$$

Dieses Ergebnis zeigt auch, dass die Impulsantwort bei $t = 0$ gleich dem Mittelwert aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert ist.

c) Der Amplitudengang lautet bei dieser Aufgabe bzw. allgemein mit der 3dB-Grenzfrequenz:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_G)^2}}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$f_G = \frac{1}{2\pi T} = \underline{159 \text{ Hz}}.$$

d) Wegen $h(t) = 0$ für $t < 0$ ist das System tatsächlich kausal. Es handelt sich um einen Tiefpass erster Ordnung. Dagegen müsste ein Hochpass folgende Bedingung erfüllen:

$$H(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0.$$

$H(f)$ ist eine komplexe Funktion. Der Phasengang lautet (siehe Aufgabe Z1.1):

$$b(f) = \arctan f/f_G.$$

Für die Frequenz $f = f_G$ erhält man $b(f = f_G) = \pi/4 = 45^\circ$.

Liegt am Eingang ein Cosinussignal mit der Frequenz f_G an, so ergibt sich für das Ausgangssignal:

$$y(t) = K \cdot \cos(2\pi f_G t - 45^\circ).$$

Dieses Signal ist zwar eine harmonische Schwingung, aber kein Cosinussignal. Richtig ist somit nur der erste Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Aufgabe A1.4

a) Die Impulsantwort ist definitionsgemäß gleich dem Ausgangssignal, wenn am Eingang ein Diracimpuls mit Gewicht 1 anliegt. Entsprechend der Musterlösungen Z1.3 und obiger Skizze gilt:

$$h_1(t) = y_1(t) = 1/T \cdot e^{-t/T}.$$

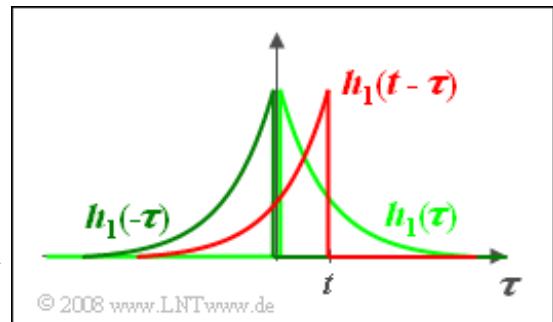
Für den Zeitpunkt t_1 soll gelten:

$$h_1(t_1) = 1/T \cdot e^{-t_1/T} = \frac{1}{2T} \Rightarrow t_1/T = \ln(2) \Rightarrow t_1 = 0.693 \cdot T = \underline{0.693 \text{ ms}}.$$

b) Das Eingangssignal $x(t)$ ist wie die Impulsantwort $h_1(t)$ ein exponentiell abfallender Impuls, jedoch dimensionslos. Somit gilt nach dem Faltungssatz:

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) = T \cdot [h_1(t) * h_1(t)].$$

Diese Faltungsoperation ist für einen spezifischen Zeitpunkt t in nebenstehender Skizze verdeutlicht.



Nach Variablenumbenennung gelten folgende Gleichungen:

$$h_1(\tau) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\tau/T} \Rightarrow h_1(-\tau) = \frac{1}{T} \cdot e^{\tau/T} \Rightarrow h_1(t - \tau) = \frac{1}{T} \cdot e^{-(t-\tau)/T}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = T \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t - \tau) \cdot h_1(\tau) \, d\tau.$$

Für $\tau < 0$ ist $h_1(\tau) = 0$ und für $\tau > t$ verschwindet der erste Faltungsoperand (siehe Skizze). Daraus folgt:

$$y_1(t) = T \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^t e^{-(t+\tau)/T} \cdot e^{-\tau/T} \, d\tau = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t e^{-t/T} \, d\tau.$$

Man sieht, dass nun der Integrand unabhängig von der Integrationsvariablen τ ist. Somit gilt:

$$y_1(t) = \frac{t}{T} \cdot e^{-t/T} \Rightarrow y_1(t = 0) = \underline{0}; \quad y_1(t = T) = e^{-1} = \underline{0.368}.$$

c) Aufgrund von $H_2(f) = H_1(f) \cdot H_1(f)$ gilt für die Impulsantwort:

$$h_2(t) = h_1(t) * h_1(t).$$

Bis auf den zusätzlichen konstanten Faktor $1/T$ erhält man somit das gleiche Ergebnis wie unter b):

$$h_2(t) = \frac{t}{T^2} \cdot e^{-t/T}.$$

Der Maximalwert wird durch Nullsetzen der Ableitung ermittelt:

$$\begin{aligned}\frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{1}{T^2} \cdot e^{-t/T} \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = T = 1 \text{ ms} \\ \Rightarrow \quad h_2(t_2) &= \frac{e^{-1}}{T} = \frac{0.368}{1 \text{ ms}} = 368 \text{ 1/s}.\end{aligned}$$

d) Allgemein bzw. mit dem Ergebnis aus c) gilt für die Sprungantwort:

$$\sigma_2(t) = \int_0^t h_2(\tau) d\tau = \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^t \tau \cdot e^{-\tau/T} d\tau.$$

Mit der Substitution $u = \tau/T$ folgt daraus unter Verwendung des angegebenen Integrals:

$$\begin{aligned}\sigma_2(t) &= \int_0^{t/T} u \cdot e^{-u} du = e^{-u} \cdot (-u - 1) \Big|_0^{t/T} \\ \Rightarrow \quad \sigma_2(t) &= 1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-t/T}.\end{aligned}$$

Zu den angegebenen Zeitpunkten erhält man unter weiterer Berücksichtigung des Faktors 2V:

$$\begin{aligned}y_2(t = T) &= 2 \text{ V} \cdot (1 - 2 \cdot e^{-1}) = 0.528 \text{ V}, \\ y_2(t = 5T) &= 2 \text{ V} \cdot (1 - 6 \cdot e^{-5}) = 1.919 \text{ V}.\end{aligned}$$

Für noch größere Zeiten nähert sich $y_2(t)$ immer mehr dem Endwert 2V an.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.4

a) Das Ausgangssignal ist das Ergebnis der Faltungsoperation zwischen $x(t)$ und $h_A(t)$:

$$y_A(t) = x(t) * h_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_A(t - \tau) d\tau.$$

Aufgrund der Rechteckfunktion und der Dauer $6T$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$y_A(t) = \frac{1}{6T} \cdot \int_{t-6T}^t x(\tau) d\tau.$$

Man erkennt, dass diese Gleichung für alle t das gleiche Ergebnis $y_A(t) \equiv 1V$ liefert.

b) Der Betragsfrequenzgang lautet:

$$|H_A(f)| = |\text{si}(\pi \cdot f \cdot 6T)|.$$

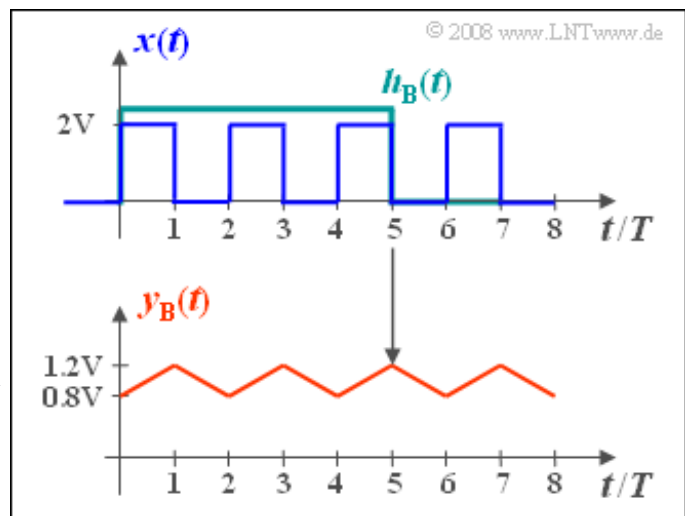
Dieser weist Nullstellen im Abstand $1/(6T)$ auf. Somit liegen auch bei $f_0, 3f_0, 5f_0$ usw. jeweils Nullstellen vor. Insbesondere gilt auch: $|H_A(f = f_0)| \equiv 0$. Vom Spektrum $X(f)$ bleibt somit nur der Gleichanteil $1V$ unverändert erhalten. Dagegen sind alle anderen Spektrallinien in $Y_A(f)$ nicht mehr enthalten.

c) Analog zur Teilaufgabe a) kann hier für das Ausgangssignal geschrieben werden:

$$y_B(t) = \frac{1}{5T} \cdot \int_{t-5T}^t x(\tau) d\tau.$$

Es ergibt sich nun ein um den Mittelwert $1V$ schwankender dreieckförmiger Verlauf, wie aus der unteren Grafik zu ersehen ist. Zu den Zeiten $t = 0, t = 2T, t = 4T, \dots$ ist

$$y_B(t) = \frac{2V \cdot 2T}{5T} \equiv 0.8V,$$



da jeweils zwei Rechtecke und drei Lücken ins Integrationsintervall fallen. Dagegen sind bei $t = T, 3T, 5T$, usw. jeweils drei Rechtecke und zwei Lücken zu berücksichtigen, und man erhält $y_B(t) \equiv 1.2V$.

d) Die Betragsfunktion lautet nun allgemein bzw. bei den Frequenzen $f = f_0 = 1/(2T)$ und $f = 3f_0$:

$$|H_B(f)| = |\text{si}(\pi \cdot f \cdot 5T)|,$$

$$|H_B(f = f_0)| = |\text{si}(\pi \frac{5T}{2T})| = |\text{si}(2.5\pi)| = \frac{1}{2.5\pi} \equiv 0.127,$$

$$|H_B(f = 3f_0)| = |\text{si}(7.5\pi)| = \frac{1}{7.5\pi} \equiv 0.042.$$

Die Spektralanteile des Rechtecksignals bei $f_0, 3f_0$, usw. werden zwar nun nicht mehr unterdrückt, aber

mit steigender Frequenz immer mehr abgeschwächt und zwar in der Form, dass der Rechteckverlauf in ein periodisches Dreiecksignal gewandelt wird. Der Gleichanteil bleibt auch hier unverändert.

Beide Filter liefern also den Mittelwert des Eingangssignals. Beim vorliegenden Signal $x(t)$ ist für die Bestimmung des Mittelwertes das Filter A besser geeignet als das Filter B, da bei Ersterem die Länge der Impulsantwort ein Vielfaches der Periodendauer $T_0 = 2T$ ist. Ist diese Bedingung – wie beim Filter B – nicht erfüllt, so überlagert sich dem Mittelwert noch ein – in diesem Beispiel dreieckförmiges – Fehlersignal.

Musterlösung zur Aufgabe A1.5

a) Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses lautet mit $\Delta f = 10 \text{ kHz}$:

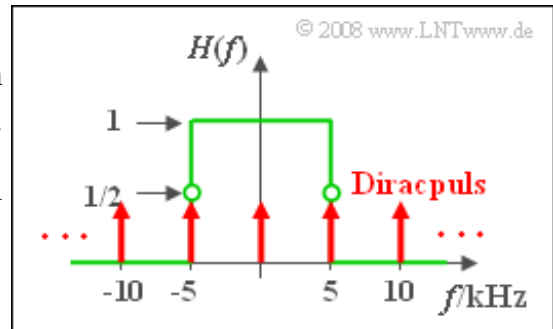
$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t).$$

Das Ausgangssignal unterscheidet sich hiervon um den Gewichtungsfaktor 10^{-3} Vs :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 10^{-3} \text{ Vs} \cdot 10^4 \text{ Hz} \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) = 10 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \\ \Rightarrow y_1(t = 0) &= \underline{10 \text{ V}}, \quad y_1(t = 50 \mu\text{s}) = 10 \text{ V} \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{6.37 \text{ V}}. \end{aligned}$$

b) Das Spektrum $X_2(f)$ des Diracpulses beinhaltet diskrete Linien im Abstand $f_A = 1/T_A = 5 \text{ kHz}$, jeweils mit dem Gewicht 5 V . Das Spektrum $Y_2(f)$ besteht somit aus einer Spektrallinie bei $f = 0$ mit dem Gewicht 5 V und je einer bei $\pm 5 \text{ kHz}$ mit Gewicht 2.5 V . Damit gilt für das Zeitsignal:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 5 \text{ V} + 5 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t) = \\ &= 10 \text{ V} \cdot \cos^2(\pi \cdot f_A \cdot t). \end{aligned}$$



Der Signalwert bei $t = 0$ beträgt somit 10 V.

c) Mit $T_A = 199 \mu\text{s}$ ist $f_A > 5 \text{ kHz}$. Wegen $H(f_A) = 0$ besteht somit das Spektrum aus nur einer Spektrallinie bei $f = 0$ mit dem Gewicht 5.025 V und man erhält den konstanten Verlauf $y_2(t) = \underline{5.025 \text{ V}}$. Wird T_A weiter verringert, so ergibt sich am Ausgang weiterhin ein Gleichsignal, aber mit größerem Signalwert (proportional zu $1/T_A$).

Dagegen ist mit $T_A = 201 \mu\text{s}$ die Abtastfrequenz etwas kleiner als die Grenzfrequenz des Filters (5 kHz), und die Spektralfunktion des Ausgangssignals lautet:

$$Y_2(f) = 4.975 \text{ V} \cdot [\delta(f) + \delta(f + f_A) + \delta(f - f_A)].$$

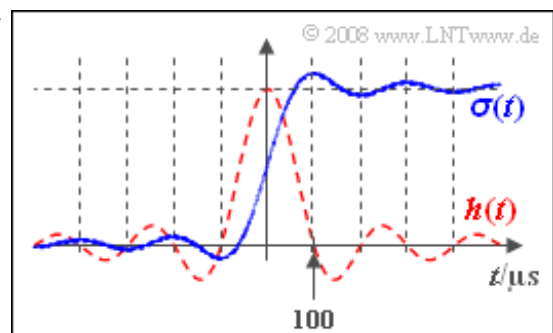
Daraus folgt für das Zeitsignal:

$$y_2(t) = 4.975 \text{ V} + 9.95 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t) \Rightarrow y_2(t = 0) = \underline{14.925 \text{ V}}.$$

Am prinzipiellen Verlauf ändert sich nichts, solange $200 \mu\text{s} < T_A < 400 \mu\text{s}$ gilt. Allerdings ergeben sich je nach T_A unterschiedliche Amplituden. Für $T_A \geq 400 \mu\text{s}$ kommen weitere Spektrallinien hinzu.

d) Das Ausgangssignal $y_3(t)$ verläuft nun entsprechend der Integralsinusfunktion:

$$\begin{aligned} y_3(t = 0) &= 10 \text{ V} \cdot \Delta f \cdot \int_{-\infty}^t \text{si}(\pi \Delta f \tau) d\tau = \\ &= 10 \text{ V} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{Si}(\pi \Delta f t) \right]. \end{aligned}$$



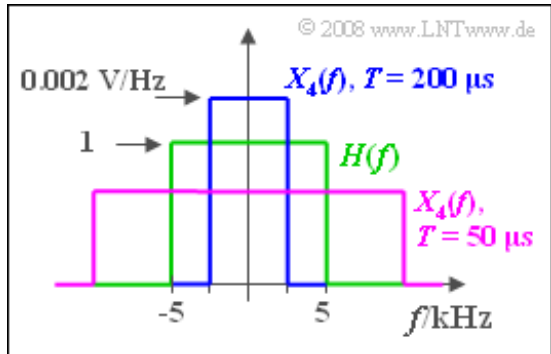
Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $y_3(t) = \underline{5 \text{ V}}$.

e) Es ist offensichtlich, dass $y_3(t)$ dann sein Maximum erreicht, wenn die si-Funktion zum ersten Mal bei positiven Zeiten die Abszisse schneidet (siehe Skizze). Also muss $t_{\max} = 1/\Delta f \equiv 100 \mu\text{s}$ gelten. Der Signalwert ergibt sich entsprechend der Tabelle auf der Angabenseite zu

$$y_3(t = t_{\max}) = 10 \text{ V} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{Si}(\pi) \right] = 10 \text{ V} \cdot [0.5 + 0.5895] \equiv 10.895 \text{ V}.$$

Zu späteren Zeiten t schwingt $y_3(t)$ langsam auf seinen Endwert 10 V ein.

f) Die Spektralfunktion $X_4(f)$ ist wie $H(f)$ rechteckförmig und für $|f| > 2.5 \text{ kHz}$ stets 0. Das bedeutet, dass in diesem Fall $Y_4(f) = X_4(f)$ gilt und entsprechend auch $y_4(t) = x_4(t)$. Damit ist $y_4(t = 0) \equiv 10 \text{ V}$.



g) Mit $T = 50 \mu\text{s}$ ist die Breite von $X_4(f)$ gleich 20 kHz und die Höhe $0.5 \cdot 10^{-3} \text{ V/Hz}$. Die Spektralfunktion $Y_4(f)$ nach Multiplikation mit $H(f)$ hat die gleiche Höhe, die Breite 10 kHz wird jedoch nun durch $H(f)$ bestimmt:

$$\begin{aligned} y_4(t) &= 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{Hz}} \cdot 10 \text{ kHz} \cdot \text{si}(\pi \Delta f t) = 5 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \Delta f t) \\ \Rightarrow y_4(t = 0) &\equiv 5 \text{ V}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.5

a) Ein Vergleich mit den Gleichungen auf **Seite 2** von Kapitel 1.3 – oder auch die Anwendung der Fourierreücktransformation – zeigt, dass $H(f)$ ein idealer Tiefpass ist:

$$H(f) = \begin{cases} K & \text{für } |f| < \Delta f/2, \\ K/2 & \text{für } |f| = \Delta f/2, \\ 0 & \text{für } |f| > \Delta f/2. \end{cases}$$

Die äquidistanten Nulldurchgänge der Impulsantwort treten im Abstand $\Delta t = 1$ ms auf. Daraus folgt die äquivalente Bandbreite $\Delta f = 1$ kHz. Wäre $K = 1$, so müsste $h(0) = \Delta f = 1000$ 1/s gelten. Wegen der Angabe $h(0) = 500$ 1/s = $\Delta f/2$ ist somit der Gleichsignalübertragungsfaktor $K = H(f = 0) = 0.5$.

b) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten im Spektralbereich lösen. Für das Ausgangsspektrum gilt:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

$X(f)$ besteht aus zwei Diracfunktionen bei $\pm f_0$, jeweils mit Gewicht $A_x/2 = 2$ V. Bei $f = f_0 = 1$ kHz $> \Delta f/2$ ist aber $H(f) = 0$, so dass $Y(f) = 0$ und damit auch $y(t) = 0$ ist $\Rightarrow \underline{y(t=0) = 0}$.

Die Lösung im Zeitbereich basiert auf der Faltung:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrie der Cosinusfunktion:

$$y(t = 0) = \frac{A_x \cdot \Delta f}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot \tau) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot \tau) d\tau.$$

Mit der Substitution $u = \pi \cdot \Delta f \cdot \tau$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$y(t = 0) = \frac{A_x}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(u) \cdot \cos(a \cdot u)}{u} du.$$

Hierbei ist die Konstante $a = 2f_0/\Delta f = 2$. Mit diesem Wert liefert das angegebene Integral den Wert 0:

$$y(t = 0) = A_y = 0.$$

c) Der Frequenzgang bei $f = f_0 = 100$ Hz ist nach den Berechnungen zu Punkt a) gleich $K = 0.5$. Deshalb ergibt sich $A_y = A_x/2 = 2$ V. Zum gleichen Ergebnis kommt man über die Faltung entsprechend obiger Gleichung. Für $a = 2f_0/\Delta f = 0.2$ ist das Integral gleich $\pi/2$ und man erhält

$$y(t = 0) = A_y = \frac{A_x}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{A_x}{2} = \underline{2 \text{ V}}.$$

d) Genau bei $f = 0.5$ kHz ist der Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich und es gilt für diese singuläre Stelle: $H(f = f_0) = K/2$. Somit ist die Amplitude des Ausgangssignals nur halb so groß wie unter c) berechnet, nämlich $A_y = \underline{1 \text{ V}}$. Zum gleichen Ergebnis kommt man mit $a = 2f_0/\Delta f = 1$ über die Faltung.

Musterlösung zur Aufgabe A1.6

a) Die Bedingung $H(f=0) = 1$ bedeutet, dass die Fläche der Impulsantwort gleich 1 ist. Daraus folgt:

$$k = \frac{1}{\Delta t} = \underline{500 \text{ 1/s.}}$$

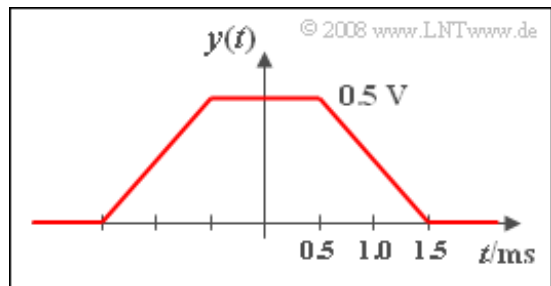
b) Das Ausgangssignal $y(t)$ ergibt sich als das Faltungsprodukt von $x(t)$ und $h(t)$. Die Faltung zweier gleich breiter Rechtecke ergibt ein Dreieck mit dem Maximum bei $t = 0$:

$$y(t=0) = 1 \text{ V} \cdot \int_{-1 \text{ ms}}^{1 \text{ ms}} k \, d\tau = 1 \text{ V} \cdot \int_{-1 \text{ ms}}^{1 \text{ ms}} \frac{1}{2 \text{ ms}} \, d\tau = 1 \text{ V.}$$

Richtig sind somit die Vorschläge 2 und 4.

c) Die Faltung von zwei unterschiedlich breiten Rechtecken führt zu einem trapezförmigen Ausgangssignal entsprechend der Skizze. Der Maximalwert tritt im konstanten Bereich von -0.5 ms bis 0.5 ms auf und beträgt

$$y(t=0) = 1 \text{ V} \cdot \frac{1}{2 \text{ ms}} \cdot 1 \text{ ms} = 0.5 \text{ V.}$$



Richtig ist somit nur die dritte Alternative.

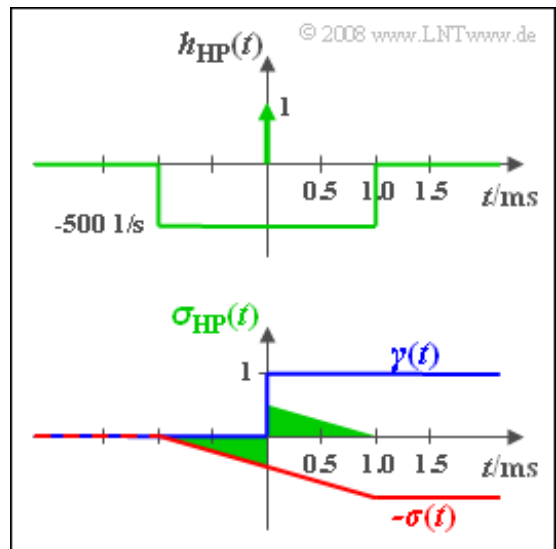
d) Die Impulsantwort des Gesamtsystems lautet:

$$h_{\text{HP}}(t) = \delta(t) - h(t).$$

Diese beiden Anteile sind in der Skizze dargestellt. Durch Integration über $h_{\text{HP}}(t)$ und Multiplikation mit 1 V kommt man zum gesuchten Signal $z(t)$. In der unteren Skizze ist das Integral über $\delta(t)$ blau, die Funktion $-\sigma(t)$ rot und das gesamte Signal $z(t)$ grün gezeichnet.

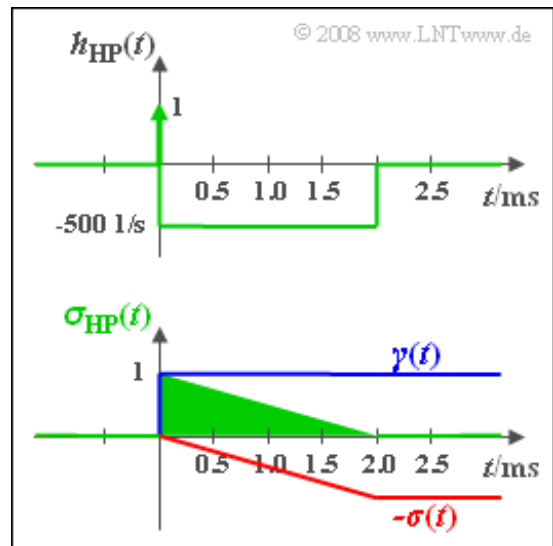
$z(t)$ ist eine ungerade Funktion in t mit einer Sprungstelle bei $t = 0$: Der Signalwert bei $t = 0$ liegt genau in der Mitte zwischen dem links- und dem rechteckseitigem Grenzwert und ist somit 0 . Für $t > 1 \text{ ms}$ gilt ebenfalls $z(t) = 0$, da das Gesamtsystem eine Hochpass-Charakteristik aufweist.

Richtig sind somit die Vorschläge 2, 3 und 4.



e) Die Grafik zeigt die resultierende Impulsantwort $h_{\text{HP}}(t)$ und die Sprungantwort $\sigma_{\text{HP}}(t)$, die bei $t = 0$ auf 1 springt und bis zum Zeitpunkt $t = 2 \text{ ms}$ auf den Endwert 0 abklingt. Zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ ms}$ ergibt sich $\sigma_{\text{HP}}(t) = 0.5$.

Das Signal $z(t)$ ist formgleich mit der Sprungantwort $\sigma_{\text{HP}}(t)$, ist jedoch noch mit 1 V zu multiplizieren. Der gesuchte Signalwert zur Zeit $t_1 = 1 \text{ ms}$ ergibt sich zu $z(t_1) \approx 0.5$.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.6

- a) Es handelt sich um einen Spaltiefpass.
- b) Die (äquivalente) Zeitdauer der Impulsantwort ist $\Delta t = 0.5$ ms. Die äquivalente Bandbreite ist gleich dem Kehrwert $\Delta f = 1/\Delta t = \underline{2 \text{ kHz}}$.
- c) Da $y_i(t)$ cosinusförmig ist, ist die Amplitude gleich dem Signalwert bei $t = 0$. Das Ausgangssignal soll hier über die Faltung berechnet werden:

$$A_i = y_i(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(\tau) \cdot h(0 - \tau) d\tau.$$

Berücksichtigt man die Symmetrie und die zeitliche Begrenzung von $h(t)$, so kommt man zum Ergebnis:

$$A_i = \frac{A_x}{\Delta t} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(2\pi f_i \tau) d\tau.$$

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

- d) Beim Gleichsignal $x_0(t) = A_x$ ist $f_i = 0$ zu setzen und man erhält $A_0 = A_x = \underline{1 \text{ V}}$.

Dagegen verschwindet bei den Cosinusfrequenzen $f_2 = 2 \text{ kHz}$ und $f_4 = 4 \text{ kHz}$ jeweils das Integral, da dann genau über eine bzw. zwei Periodendauern zu integrieren ist: $A_2 = \underline{0}$ und $A_4 = \underline{0}$.

Im Frequenzbereich entsprechen die hier behandelten Fälle:

$$H(f = 0) = 1, \quad H(f = \Delta f) = 0, \quad H(f = 2\Delta f) = 0.$$

- e) Das Ergebnis von c) lautet unter Berücksichtigung der Symmetrie für $f_i = f_1$:

$$A_1 = \frac{2A_x}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t/2} \cos(2\pi f_1 \tau) d\tau = \frac{2A_x}{2\pi f_1 \cdot \Delta t} \cdot \sin(2\pi f_1 \frac{\Delta t}{2}) = A_x \cdot \text{si}(\pi f_1 \Delta t).$$

Mit $f_1 \cdot \Delta t = 0.5$ lautet somit das Ergebnis:

$$A_1 = A_x \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2A_x}{\pi} = \underline{0.637 \text{ V}}.$$

Entsprechend erhält man mit $f_3 \cdot \Delta t = 1.5$:

$$A_3 = A_x \cdot \text{si}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{2A_x}{3\pi} = -\frac{A_1}{3} = \underline{-0.212 \text{ V}}.$$

Genau zu den gleichen Ergebnissen – aber deutlich schneller – kommt man durch die Anwendung der Gleichung $A_i = A_x \cdot H(f = f_i)$.

Bereits aus den Grafiken auf der Angabenseite erkennt man, dass das Integral über $x_1(t)$ im markierten Bereich positiv und das Integral über $x_3(t)$ negativ ist. Es ist allerdings anzumerken, dass man im Allgemeinen als Amplitude meist den Betrag bezeichnet (siehe Hinweis auf der Angabenseite).

Musterlösung zur Aufgabe A1.7

a) Die äquivalente Bandbreite Δf ist gleich $h(t = \tau) = 8 \text{ MHz}$. Dies ist gleichzeitig der Kehrwert der äquivalenten Impulsdauer $\Delta t = 125 \text{ ns}$. Auch die Phasenlaufzeit $\tau = 250 \text{ ns}$ kann direkt aus der Grafik abgelesen werden.

b) Ohne Berücksichtigung der Laufzeit ergäbe sich ein Cosinussignal mit der Amplitude

$$A_y = 1 \text{ V} \cdot e^{-\pi(6\text{MHz}/8\text{MHz})^2} = 0.171 \text{ V}.$$

Die Laufzeit bewirkt eine Phasenverschiebung um 3π :

$$\begin{aligned} y(t) &= A_y \cdot \cos(2\pi f_0(t - \tau)) = A_y \cdot \cos(2\pi f_0 t - 2\pi \cdot 6 \text{ MHz} \cdot 250 \text{ ns}) \\ &= A_y \cdot \cos(2\pi f_0 t - 3\pi) = -A_y \cdot \cos(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist somit $y(t = 0) = -0.171 \text{ V}$.

c) Die Impulsantwort lautet:

$$h(t) = h_{\text{GTP}}(t - \tau) = \Delta f \cdot e^{-\pi(\frac{t-\tau}{\Delta t})^2}.$$

Da $h(t)$ im Bereich $t < 0$ stetig zunimmt, tritt der Maximalwert (bei negativen Zeiten) etwa bei $t = 0$ auf:

$$h(t = 0) = \Delta f \cdot e^{-\pi(\frac{\tau}{\Delta t})^2} = \Delta f \cdot e^{-4\pi}.$$

Mit $h(t = \tau) = \Delta f$ erhält man so:

$$\varepsilon_{\text{max}} = e^{-4\pi} \approx 3.49 \cdot 10^{-6}.$$

d) Wir lassen vorerst die Phasenlaufzeit τ des zweiten Systems außer Betracht und berechnen die Sprungantwort des Gaußtieffpasses:

$$\sigma_{\text{GTP}}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\pi(t'/\Delta t)^2} dt'.$$

Nach der Substitution $t' \rightarrow u$ sowie mit dem Gaußschen Fehlerintegral $\phi(x)$ erhält man

$$\sigma_{\text{GTP}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\sqrt{2\pi} \cdot t/\Delta t} e^{-u^2/2} du = \phi\left(\sqrt{2\pi} \cdot \frac{t}{\Delta t}\right),$$

nach Substitution: $u = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta t} \cdot t'$, wobei $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

Unter Berücksichtigung der Laufzeit τ erhält man für die gesamte Sprungantwort:

$$\sigma(t) = \sigma_{\text{GTP}}(t - \tau) = \phi\left(\sqrt{2\pi} \cdot \frac{t - \tau}{\Delta t}\right).$$

Der Wert bei $t = \tau = 250 \text{ ns}$ ergibt sich zu $\phi(0) = 0.500$. Entsprechend erhält man für $t = 300 \text{ ns}$:

$$\sigma(t = 300 \text{ ns}) = \sigma_{\text{GTP}}(t = 50 \text{ ns}) = \phi\left(\sqrt{2\pi} \cdot \frac{50 \text{ ns}}{125 \text{ ns}}\right) \approx \phi(1) = 0.841.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.7

a) Die erste Aussage ist zutreffend: Nur für ein lineares System kann ein Frequenzgang angegeben werden. Damit dies hier möglich ist, darf die Nichtlinearität keine Rolle spielen. Das heißt, es muss sicher gestellt sein, dass $|x(t)|$ nicht größer als 4 V ist.

Dagegen ist die zweite Aussage nicht zutreffend. Die Bandbreite von $H_3(f)$ hat keinen Einfluss darauf, ob die Nichtlinearität eliminiert werden kann oder nicht. Richtig sind also die Antworten 1 und 3.

b) Der erste Gaußtieffpass wird im Frequenzbereich wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} X(f) &= W(f) \cdot H_1(f) = 5 \text{ V} \cdot T \cdot e^{-\pi(f \cdot T)^2} \cdot e^{-\pi(f/\Delta f_1)^2} \\ &= 5 \text{ V} \cdot T \cdot e^{-\pi f^2 (T^2 + \Delta t_1^2)} = 5 \text{ V} \cdot T \cdot e^{-\pi(f/\Delta f_x)^2} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Δf_x die äquivalente Bandbreite von $X(f)$. Der Signalwert bei $t = 0$ – gleichzeitig der Maximalwert des Signals – ist gleich der Spektralfläche; dieser soll nicht größer werden als 4 V:

$$x_{\max} = x(t = 0) = 5 \text{ V} \cdot T \cdot \Delta f_x \leq 4 \text{ V}.$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T \cdot \Delta f_x} > \frac{5}{4} &\Rightarrow \frac{1}{T^2 \cdot \Delta f_x^2} > \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{T^2 + \Delta t_1^2}{T^2} > \frac{25}{16} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta t_1^2}{T^2} > \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{T^2}{\Delta t_1^2} \leq \frac{16}{9} \Rightarrow T \leq \frac{4}{3} \cdot \Delta t_1 \equiv \underline{0.4 \text{ ms}}. \end{aligned}$$

Die Kontrollrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta t_x &= \sqrt{T^2 + \Delta t_1^2} = \sqrt{(0.4 \text{ ms})^2 + (0.3 \text{ ms})^2} = 0.5 \text{ ms} \Rightarrow \Delta f_x = \frac{1}{\Delta t_x} = 2 \text{ kHz} \\ &\Rightarrow x(t = 0) = 5 \text{ V} \cdot T \cdot \Delta f_x = 5 \text{ V} \cdot 0.4 \text{ ms} \cdot 2 \text{ kHz} = 4 \text{ V}. \end{aligned}$$

c) Die Gaußtieffässe erfüllen die Bedingung $H_1(f = 0) = H_3(f = 0) = 1$. Unter Berücksichtigung der Verstärkung des zweiten Blocks im linearen Bereich erhält man somit für die Gesamtverstärkung:

$$\underline{K = 2}.$$

Für die äquivalente Impulsdauer des Gesamtsystems gilt:

$$\begin{aligned} \Delta t_G &= \sqrt{\Delta t_1^2 + \frac{1}{\Delta f_3^2}} = \sqrt{(0.3 \text{ ms})^2 + \left(\frac{1}{2.5 \text{ kHz}}\right)^2} = 0.5 \text{ ms} \\ &\Rightarrow \Delta f_G = \frac{1}{\Delta t_G} \equiv \underline{2 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.8

a) Bei beiden Tiefpässen ist das Integral über $H(f)$ gleich $f_1 + f_2$. Wegen $H(f=0) = 1$ gilt somit auch der Lösungsvorschlag 2:

$$\Delta f = f_1 + f_2.$$

b) Setzt man die unter a) gefundene Beziehung in die Definitionsgleichung des Rolloff-Faktors ein, so erhält man

$$f_2 - f_1 = r \cdot \Delta f = 2 \text{ kHz}, \quad f_2 + f_1 = 10 \text{ kHz}.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen ergeben sich die so genannten „Eckfrequenzen“ zu $f_1 = 4 \text{ kHz}$ und $f_2 = 6 \text{ kHz}$.

c) Die erste si-Funktion von $h_{\text{TTP}}(t)$ führt zu Nullstellen im Abstand Δt (siehe auch Gleichung auf der Angabenseite). Die zweite si-Funktion bewirkt Nullstellen bei Vielfachen von $5 \cdot \Delta t$. Da diese exakt mit den Nullstellen der ersten si-Funktion zusammenfallen, gibt es keine zusätzlichen Nullstellen.

Der Sonderfall $r = 0$ entspricht dem idealen rechteckförmigen Tiefpass mit si-förmiger Impulsantwort. Diese klingt extrem langsam ab. Dagegen fällt die si^2 -förmige Impulsantwort des Dreiecktiefpasses (Sonderfall für $r = 1$) asymptotisch mit $1/t^2$ und damit schneller als mit $r = 0.2$.

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 4.

d) $h_{\text{CRTP}}(t)$ weist aufgrund der si-Funktion ebenfalls Nullstellen im Abstand Δt auf. Die Cosinusfunktion hat Nullstellen zu folgenden Zeitpunkten:

$$\begin{aligned} \cos(\pi \cdot r \cdot t / \Delta t) = 0 &\Rightarrow r \cdot t / \Delta t = \pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5, \dots \\ \Rightarrow t / \Delta t &= \pm 2.5, \pm 7.5, \pm 12.5, \dots \end{aligned}$$

Die Nullstelle des Zählers bei $t/\Delta t = 2.5$ wird allerdings durch den ebenfalls verschwindenden Nenner zunichte gemacht. Die weiteren Nullstellen bei 7.5, 12.5, usw. bleiben dagegen bestehen.

Auch hier führt $r = 0$ zum Rechtecktiefpass und damit zur si-förmigen Impulsantwort. Dagegen klingt die Impulsantwort des Cosinus-Quadrat-Tiefpasses (Sonderfall für $r = 1$) extrem schnell ab. Dieser wird in der Zusatzaufgabe Z1.8 eingehend untersucht.

Richtig sind hier die Vorschläge 1, 2 und 4.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.8

a) Aus der ersten Gleichung auf der Angabenseite folgt aufgrund der si-Funktion direkt $y(t = 0) = 1$ und $y(t = T) = y(t = 2T) = \dots = 0$. Auch aus der zweiten Gleichung erhält man diese Ergebnisse, beispielsweise

$$\begin{aligned} y(t = 0) &= \frac{\pi}{4} \cdot \text{si}(0) \cdot [\text{si}(\pi/2) + \text{si}(-\pi/2)] \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \text{si}(\pi/2) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \equiv 1, \\ y(t = T) &= \frac{\pi}{4} \cdot \text{si}(\pi) \cdot [\text{si}(3\pi/2) + \text{si}(\pi/2)] \equiv 0. \end{aligned}$$

b) Zur Berechnung dieser Signalwerte ist die zweite Darstellung besser geeignet:

$$y(t = T/2) = \frac{\pi}{4} \cdot \text{si}(\pi/2) \cdot [\text{si}(\pi) + \text{si}(0)].$$

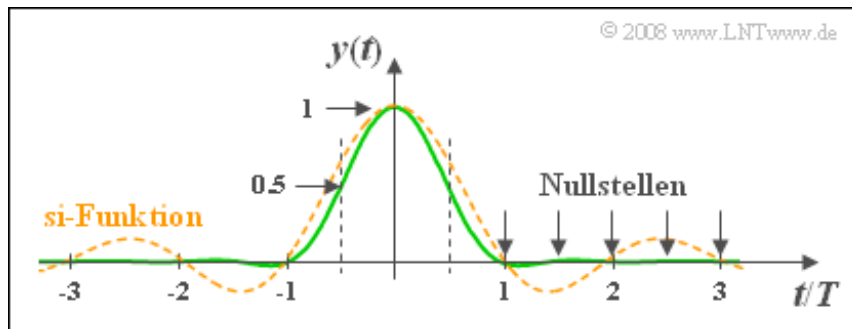
Mit $\text{si}(0) = 1$ und $\text{si}(\pi) = 0$ erhält man so:

$$y(t = T/2) = \frac{\pi}{4} \cdot \text{si}(\pi/2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \equiv 0.5.$$

In analoger Weise ergibt sich für $t = 1.5T$:

$$y(t = 1.5T) = \frac{\pi}{4} \cdot \text{si}(3\pi/2) \cdot [\text{si}(2\pi) + \text{si}(\pi)] \equiv 0.$$

Hierbei ist $\text{si}(\pi) = \text{si}(2\pi) = 0$ berücksichtigt. Zu den Zeitpunkten $t/T = 2.5, 3.5, \dots$ ist $y(t)$ ebenfalls 0, wie die nachfolgende Grafik zeigt.



c) Für große Werte von t gilt näherungsweise (wenn man die „1“ im Nenner vernachlässigt):

$$y(t) = \frac{\sin(\pi \cdot t/T) \cdot \cos(\pi \cdot t/T)}{-(\pi \cdot t/T)(2 \cdot t/T)^2} = -\frac{\sin(2\pi \cdot t/T)}{8\pi \cdot (t/T)^3}.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)/2$ ist. Zum Zeitpunkt $t = 10.75 T$ gilt:

$$\sin(2\pi \cdot t/T) = \sin(21.5\pi) = \sin(1.5\pi) = -1.$$

$$\Rightarrow y(t = 10.75T) = \frac{1}{8\pi \cdot (10.75)^3} \equiv 0.32 \cdot 10^{-4}.$$

d) Der Empfängerfrequenzgang lautet für $|f \cdot T| \leq 1$:

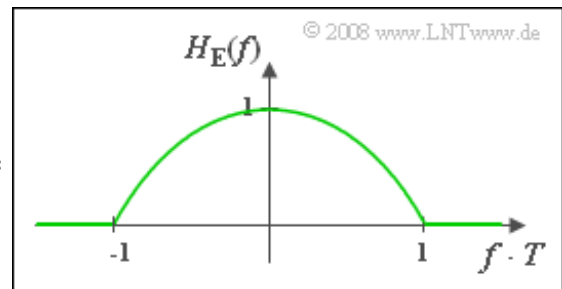
$$H_E(f) = \frac{H(f)}{H_S(f)} = \frac{\cos^2(\pi f T / 2)}{\text{si}(\pi f T)}.$$

Dieser Funktionsverlauf ist in der Grafik dargestellt. Für die gesuchten Stützwerte gilt:

$$H_E(f = 0) = \frac{\cos^2(0)}{\text{si}(0)} \equiv 1,$$

$$\begin{aligned} H_E(f = \frac{1}{2T}) &= \frac{\cos^2(\pi/4)}{\text{si}(\pi/2)} = (\sqrt{2}/2)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4} \approx 0.785, \end{aligned}$$

$$H_E(f = \frac{1}{T}) = \frac{\cos^2(\pi/2)}{\text{si}(\pi)} = \text{"0/0"} \equiv 0.$$



Bei diesem Ergebnis ist berücksichtigt, dass im gesamten Frequenzbereich $H_S(f) \geq H(f)$ gilt. Eigentlich müsste der zuletzt berechnete Wert durch einen Grenzübergang mathematisch-exakt bestimmt werden.