

Musterlösung zur Aufgabe A2.1

a) Aufgrund der Kennlinie mit linearem und quadratischem Anteil gilt:

$$\begin{aligned}y(t) &= 2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_0 t) + 1 \text{ V}^{-1} \cdot (2 \text{ V})^2 \cdot \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= 2 \text{ V} \cdot [1 + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)].\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt somit der Signalwert 6 V auf.

b) Ein ideales System kommt wegen $z(t) \neq x(t)$ nicht in Frage. Die Alternativen 2 und 3 sind möglich. Bei nur einer Frequenz ($f_0 = 5 \text{ kHz}$) ist keine Aussage möglich, ob eine zweite Frequenzkomponente ebenfalls um $\alpha = 0.5$ gedämpft und um $\tau = T_0/4 = 50 \text{ }\mu\text{s}$ verzögert würde. Die letzte Alternative müsste der Beobachter – obwohl teilweise zutreffend – logischerweise verneinen.

c) Er würde erkennen, dass S_2 ein linear verzerrendes System ist \Rightarrow Lösungsvorschlag 2. Bei einem verzerrungsfreien System müsste $z(t)$ zusätzlich noch eine Gleich- und eine 10 kHz-Komponente beinhalten, bei einem nichtlinear verzerrenden System noch größere Frequenzanteile (bei Vielfachen von 10 kHz).

d) In diesem Fall würde $Y(f)$ Spektrallinien bei $f = 0$, $f = 10 \text{ kHz}$ und $f = 20 \text{ kHz}$ aufweisen. Die auf der Angabenseite beschriebene Messung mit $f_0 = 5 \text{ kHz}$ hat gezeigt, dass $H_2(f = 0)$ und $H_2(f = 10 \text{ kHz})$ jeweils 0 sein werden. Die einzig mögliche Signalform ist somit

$$z(t) = 2 \text{ V} \cdot H_2(f = 20 \text{ kHz}) \cdot \cos(2\pi \cdot 20 \text{ kHz} \cdot t).$$

Möglich sind also die erste und die letzte der genannten Alternativen, je nachdem, ob das System S_2 die Frequenz 20 kHz unterdrückt oder durchlässt \Rightarrow Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.1

a) Diese Konstellation ist möglich, da für alle $Y(f) \neq 0$ auch $X(f)$ stets von 0 verschieden ist. Für alle Frequenzen kleiner als 0.5 kHz bewirkt $H_V(f) = B(f)/A(f) < 1$ eine Dämpfung, während die Frequenzen zwischen 0.5 kHz und 1 kHz durch das System angehoben werden \Rightarrow Ja.

b) Bei dieser Konstellation ist auch eine vollständige lineare Entzerrung mit

$$H_E(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{A(f)}{B(f)} = \frac{1}{H_V(f)}$$

möglich, da beide Spektren genau bis 1 kHz reichen \Rightarrow Ja.

c) Auch diese Konstellation ist möglich. Das Filter $H_V(f)$ muss für die Frequenzen $|f| < 1$ kHz aus dem Gaußspektrum ein Dreieckspektrum formen und alle Frequenzen $|f| > 1$ kHz unterdrücken \Rightarrow Ja.

d) Eine vollständige Entzerrung ist hier nicht möglich. Die Anteile des Gaußspektrums, die durch $H_V(f)$ vollständig eliminiert wurden, können durch das lineare System nicht wieder hergestellt werden \Rightarrow Nein.

e) Diese Konstellation ist mit einem linearen System nicht möglich, da im Spektrum $C(f) = A(f) \cdot H_V(f)$ keine Spektralanteile enthalten sein können, die es in $A(f)$ nicht gibt \Rightarrow Nein.

Die Frage, ob es ein nichtlineares System gibt, das aus dem \cos^2 -Spektrum ein Gaußspektrum formt, ist nicht gestellt und muss so auch nicht beantwortet werden: Die Autoren glauben eher „Nein“.

Musterlösung zur Aufgabe A2.2

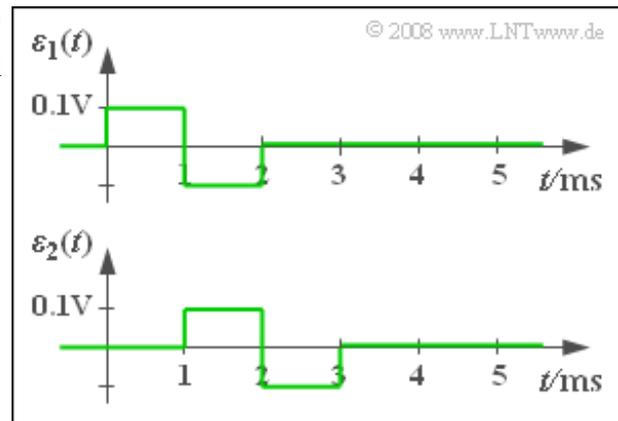
a) Mit den gegebenen Parametern $\alpha = 1$ und $\tau = 0$ erhält man das in der Grafik dargestellte Fehlersignal $\varepsilon_1(t)$. Die Verzerrungsleistung ist somit gleich:

$$P_{V1} = \frac{1 \text{ ms}}{4 \text{ ms}} \cdot [(0.1 \text{ V})^2 + (-0.1 \text{ V})^2]$$

$$\Rightarrow P_{V1} = \underline{0.005 \text{ V}^2}.$$

b) Die Leistung des Eingangssignals beträgt:

$$P_x = \frac{1}{4 \text{ ms}} \cdot (1 \text{ V})^2 \cdot 4 \text{ ms} = 1 \text{ V}^2.$$



Mit dem Ergebnis aus a) erhält man somit für das Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis:

$$\rho_{V1} = \frac{P_x}{P_{V1}} = \frac{1 \text{ V}^2}{0.005 \text{ V}^2} = 200 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_{V1} = \underline{23.01 \text{ dB}}.$$

c) Die Skizze auf dem Angabenblatt macht deutlich, dass sich auch ohne die auftretenden Verzerrungen, sondern allein durch Dämpfung und Laufzeit, das Signal $y(t)$ von $x(t)$ deutlich unterscheiden würde. Es würde sich $y(t) = 0.5 \cdot x(t - 1 \text{ ms})$ ergeben.

Wenn jemand diese Parameterwerte nicht sofort aus der Grafik erkennt, so müsste er für sehr (unendlich) viele α - und τ -Werte zunächst das Fehlersignal

$$\varepsilon_2(t) = y_2(t) - \alpha \cdot x(t - \tau)$$

und anschließend den mittleren quadratischen Fehler ermitteln, wobei das Integrationsintervall jeweils an τ anzupassen ist. Auch dann würde man das kleinstmögliche Ergebnis für $\alpha = 0.5$ und $\tau = 1 \text{ ms}$ erhalten. Für diese Optimierung von α und τ sollte man sich allerdings schon ein Computerprogramm gönnen.

d) Die obige Skizze zeigt, dass $\varepsilon_2(t)$ bis auf eine Verschiebung um 1 ms gleich dem Fehlersignal $\varepsilon_1(t)$ ist. Mit dem Integrationsintervall 1 ms ... 5 ms ergibt sich somit auch die gleiche Verzerrungsleistung:

$$P_{V2} = P_{V1} = \underline{0.005 \text{ V}^2}.$$

e) Entsprechend dem Angabenblatt gilt:

$$\rho_{V2} = \frac{\alpha^2 \cdot P_x}{P_{V2}} = \frac{0.5^2 \cdot 1 \text{ V}^2}{0.005 \text{ V}^2} = 50 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_{V2} = \underline{16.99 \text{ dB}}.$$

Trotz gleicher Verzerrungsleistung ist $10 \cdot \lg \rho_{V2}$ gegenüber $10 \cdot \lg \rho_{V1}$ um etwa 6 dB geringer. Das Signal $y_2(t)$ ist also hinsichtlich des SNR deutlich ungünstiger als $y_1(t)$. Hierbei ist berücksichtigt, dass nun wegen $\alpha = 0.5$ die Leistung des Ausgangssignals nur noch ein Viertel der Eingangsleistung beträgt.

Würde man diese Dämpfung am Ausgang durch eine Verstärkung um $1/\alpha$ kompensieren, so würde zwar die Verzerrungsleistung um α^2 größer. Das Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis ρ_{V2} bliebe jedoch erhalten, weil auch das „Nutzsignal“ um den gleichen Betrag angehoben wird.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.2

a) Richtig ist Antwort 2: Der größte gemeinsame Teiler von $f_1 = 2$ kHz und $f_2 = 3$ kHz ist $f_0 = 1$ kHz. Damit beträgt die Periodendauer $T_0 = 1/f_0 = 1$ ms. Das Signal lautet aufgrund des Phasenterms $e^{j \cdot 90^\circ}$:

$$x(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) - 0.2 \text{ V} \cdot \sin(2\pi f_2 t).$$

b) Um die Leistung im Zeitbereich zu berechnen, muss das Signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ quadriert und über ein geeignetes Zeitintervall gemittelt werden. Für ein periodisches Signal genügt die Mittelung über T_0 :

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} (x_1(t) + x_2(t))^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x_1^2(t) dt + \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x_2^2(t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x_1(t) \cdot x_2(t) dt. \end{aligned}$$

Das erste Integral liefert:

$$P_1 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} (1 \text{ V})^2 \cdot \cos^2(2\pi f_1 t) dt = \frac{1 \text{ V}^2}{2T_0} \cdot \int_0^{T_0} (1 + \cos(4\pi f_1 t)) dt = 0.5 \text{ V}^2.$$

In gleicher Weise erhält man für die Leistung des zweiten Terms: $P_2 = (0.2 \text{ V})^2/2 = 0.02 \text{ V}^2$. Dagegen liefert das letzte Integral keinen Beitrag, da $x_1(t)$ und $x_2(t)$ orthogonal zueinander sind. Somit erhält man für die gesamte Signalleistung:

$$P_x = P_1 + P_2 = 0.5 \text{ V}^2 + 0.02 \text{ V}^2 \equiv \underline{\underline{0.52 \text{ V}^2}}.$$

Dieses Ergebnis kann man auch aus der Spektralfunktion herleiten, wenn man die Amplituden aller diskreten Spektralanteile quadriert, halbiert und aufsummiert. Die Phasenlage der einzelnen Spektrallinien muss dabei nicht berücksichtigt werden.

c) Unabhängig davon, ob ein lineares oder ein nichtlineares System vorliegt, kann für das analytische Spektrum des Differenzsignals geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_+(f) &= Y_+(f) - X_+(f) = (1.1 \text{ V} - 1 \text{ V}) \cdot \delta(f - 2 \text{ kHz}) \\ &+ [0.25 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 0.2 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 90^\circ}] \cdot \delta(f - 3 \text{ kHz}) \\ &+ 0.05 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \cdot \delta(f - 5 \text{ kHz}). \end{aligned}$$

Die komplexe Amplitude des zweiten Terms ist:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0.25 \text{ V} \cdot \cos(60^\circ) + j \cdot 0.25 \text{ V} \cdot \sin(60^\circ) - j \cdot 0.05 \text{ V} \\ &= 0.25 \text{ V} \cdot 0.5 + j \cdot 0.25 \text{ V} \cdot 0.866 - j \cdot 0.2 \text{ V} = 0.125 \text{ V} + j \cdot 0.016 \text{ V}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Betrag:

$$|C_2| = \sqrt{(0.125 \text{ V})^2 + (0.016 \text{ V})^2} = 0.126 \text{ V}.$$

Die Phasenlagen müssen bei der Leistungsberechnung nicht berücksichtigt werden. Somit gilt:

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot [(0.1 \text{ V})^2 + (0.126 \text{ V})^2 + (0.05 \text{ V})^2] = \underline{0.0142 \text{ V}^2}.$$

d) Entsprechend der Definition auf der Angabenseite gilt:

$$\rho_V = \frac{P_x}{P_V} = \frac{0.52 \text{ V}^2}{0.0142 \text{ V}^2} = 36.65 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg \rho_V = \underline{15.64 \text{ dB}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.3

a) Die sehr ungenaue Näherung $g_1(x) = x$ ist linear in x und führt deshalb auch nicht zu nichtlinearen Verzerrungen. Damit ergibt sich der Klirrfaktor $K = 0$.

b) Das analytische Spektrum (nur positive Frequenzen) des Eingangssignals lautet:

$$X_+(f) = A \cdot \delta(f - f_0).$$

Am Ausgang der nichtlinearen Kennlinie $g_3(x)$ liegt dann folgendes Signal an:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 t) - \frac{A^3}{6} \cdot \cos^3(\omega_0 t) = \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 t) - \frac{3}{4} \cdot \frac{A^3}{6} \cdot \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{4} \cdot \frac{A^3}{6} \cdot \cos(3\omega_0 t) = \\ &= A_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + A_3 \cdot \cos(3\omega_0 t). \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten A_1 und A_3 erhält man durch Koeffizientenvergleich:

$$A_1 = A - \frac{A^3}{8}, \quad A_3 = -\frac{A^3}{24}.$$

Mit $A = 0.5$ ergibt sich $A_1 \approx 0.484$ und $A_3 \approx 0.005$. Somit lautet der Klirrfaktor:

$$K = K_3 = \frac{|A_3|}{A_1} = \frac{0.005}{0.484} \approx 1.08\%.$$

Anzumerken ist, dass bei der Näherung $g_3(x)$ nur der kubische Anteil K_3 des Klirrfaktors wirksam ist.

Für $A = 1$ und $A = 1.5$ ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$A = 1.0 : A_1 \approx 0.875, \quad A_3 \approx -0.041 \quad \Rightarrow \quad K \approx 4.76\%,$$

$$A = 1.5 : A_1 \approx 1.078, \quad A_3 \approx -0.140 \quad \Rightarrow \quad K \approx 13\%.$$

c) In ähnlicher Weise wie beim Unterpunkt b) gilt nun

$$y(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + A_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + A_5 \cdot \cos(5\omega_0 t)$$

mit folgenden Koeffizienten:

$$A_1 = A - \frac{A^3}{8} + \frac{A^5}{192}, \quad A_3 = -\frac{A^3}{24} + \frac{A^5}{384}, \quad A_5 = \frac{A^5}{1920}.$$

Daraus ergeben sich mit $A = 1$ die Zahlenwerte:

$$A_1 \approx 1 - 0.125 + 0.005 = 0.880, \quad A_3 \approx -0.042 + 0.003 = -0.039, \quad A_5 \approx 0.0005$$

$$\Rightarrow K_3 = \frac{|A_3|}{A_1} = 0.0443, \quad K_5 = \frac{|A_5|}{A_1} = 0.0006 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{K_3^2 + K_5^2} \approx 4.45\%.$$

d) Der Ansatz $g_5(x)$ ist im gesamten Bereich eine bessere Näherung für die Sinusfunktion $g(x)$ als die Näherung $g_3(x)$. Deshalb ist der in der Teilaufgabe c) berechnete Wert K_c eine bessere Näherung für den tatsächlichen Klirrfaktor K als K_b – die erste Aussage ist somit richtig.

Dagegen ist die zweite Aussage falsch, wie schon die Berechnung gezeigt hat: $K_b = 4.76\%$ ist größer als $K_c = 4.45\%$. Der Grund hierfür ist, dass $g_3(x)$ unterhalb von $g_5(x)$ liegt und damit auch eine größere Abweichung vom linearen Verlauf vorliegt.

Für $A = 0.5$ wird $K_c \approx K_b$ gelten. Schon die Kennlinie auf der Angabenseite zeigt, dass für $|x| \leq 0.5$ die beiden Funktionen $g_3(x)$ und $g_5(x)$ innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht zu unterscheiden sind. Damit ergeben sich auch gleiche Klirrfaktoren. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.3

a) Unter Berücksichtigung der kubischen Näherung $g_3(x)$ erhält man vor dem Hochpass:

$$\begin{aligned}y_C(t) &= g_3[x_C(t)] = [C + A \cdot \cos(\omega_0 t)] - \frac{1}{6} \cdot [C + A \cdot \cos(\omega_0 t)]^3 = \\&= C + A \cdot \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{6} \cdot [C^3 + 3 \cdot C^2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t) + \\&\quad + 3 \cdot C \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t) + A^3 \cdot \cos^3(\omega_0 t)].\end{aligned}$$

Das Signal $y_C(t)$ beinhaltet eine Gleichsignalkomponente $C - C^3/6$, die jedoch aufgrund des Hochpasses im Signal $y(t)$ nicht mehr enthalten ist: $A_0 = 0$.

b) Bei Anwendung der angegebenen trigonometrischen Beziehungen erhält man folgende Koeffizienten mit $A = C = 0.5$:

$$A_1 = A - \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot C^2 \cdot A - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot A^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{27}{64} \approx \underline{0.422},$$

$$A_2 = -\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2 = -\frac{1}{32} \approx \underline{-0.031},$$

$$A_3 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot A^3 = -\frac{1}{192} \approx \underline{-0.005}.$$

Terme höherer Ordnung kommen nicht vor. Somit ist auch $A_4 = 0$.

c) Die Klirrfaktoren zweiter und dritter Ordnung ergeben sich bei dieser Aufgabe zu $K_2 = 2/27 \approx 7.41\%$ und $K_3 = 1/81 \approx 1.23\%$. Damit ist der Gesamtklirrfaktor

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2} \approx \underline{7.51\%}.$$

d) Der Maximalwert tritt zum Zeitpunkt $t = 0$ und bei Vielfachen von T auf:

$$y_{\max} = y(t = 0) = A_1 + A_2 + A_3 = 0.422 - 0.031 - 0.005 = \underline{0.386}.$$

Die Minimalwerte liegen genau in der Mitte zwischen den Maxima und es gilt:

$$y_{\min} = -A_1 + A_2 - A_3 = -0.422 - 0.031 + 0.005 = \underline{-0.448}.$$

Das Signal $y(t)$ ist gegenüber dem in der Skizze auf der Angabenseite eingezeichnetem Signal um 0.448 nach unten verschoben. Dieser Signalwert ergibt sich aus folgender Gleichung mit $A = C = 1/2$:

$$C - \frac{C \cdot A^2}{4} - \frac{C^3}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{48} = 0.448.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.4

a) Mit der Eingangsamplitude $A_x = 1 \text{ V}$ entsprechend der oberen Skizze liefert nur der Klirrfaktor zweiter Ordnung einen relevanten Beitrag. Deshalb gilt:

$$K \approx K_2 = \frac{0.062 \text{ V}}{0.992 \text{ V}} \approx 6.25\%.$$

b) Für die Eingangsamplitude $A_x = 2 \text{ V}$ (untere Skizze) lauten die verschiedenen Klirrfaktoren:

$$K_2 = \frac{0.234 \text{ V}}{1.938 \text{ V}} \approx 0.121, \quad K_3 = \frac{0.058 \text{ V}}{1.938 \text{ V}} \approx 0.030, \quad K_4 = \frac{0.018 \text{ V}}{1.938 \text{ V}} \approx 0.009.$$

Somit lautet der Gesamtklirrfaktor:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + \dots} \approx 12.5\%.$$

c) Hier bewirken die nichtlinearen Verzerrungen, dass die untere Halbwelle spitzförmiger verläuft als die obere. Da zudem $y(t)$ gleichsignalfrei ist, gilt $y_{\max} = 1.75 \text{ V}$ und $y_{\min} = -2.25 \text{ V}$. Die Symmetrie bezüglich der Nulllinie ist somit nicht mehr gegeben.

Bei einem nichtlinearen System ist der Klirrfaktor K unabhängig von der Frequenz des cosinusförmigen Eingangssignals, aber stark abhängig von dessen Amplitude. Richtig sind hier somit die beiden ersten Lösungsvorschläge.

d) Der Effektivwert eines Cosinussignals ist bekanntlich das „Wurzel aus 0.5“-fache der Amplitude. Das Quadrat hiervon bezeichnet man als die Leistung:

$$P_x = \frac{A_x^2}{2} = \frac{(2 \text{ V})^2}{2} = 2 \text{ V}^2.$$

Eigentlich hängt die Leistung ja auch vom Bezugswiderstand R ab und besitzt die Einheit „Watt“. Mit $R = 1 \Omega$ ergibt sich $P_x = 2 \text{ W}$, also der genau gleiche Zahlenwert wie bei dieser einfacheren Berechnung.

e) Bezeichnet man mit A_1 die Amplitude der Grundwelle von $y_2(t)$ und mit A_2 , A_3 und A_4 die so genannten Oberwellen, so erhält man für die Verzerrungsleistung durch Berechnung im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{1}{2} \cdot [(A_1 - A_x)^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(-2 \text{ V} + 1.938 \text{ V})^2 + (0.234 \text{ V})^2 + (0.058 \text{ V})^2 + (0.018 \text{ V})^2] \approx 0.031 \text{ V}^2. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet A_x die Amplitude des Eingangssignals. Die Vorzeichen der Oberwellen spielen bei dieser Berechnung keine Rolle.

f) Mit den Ergebnissen der Unterpunkte d) und e) erhält man:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 10 \cdot \lg \frac{P_x}{P_V} = 10 \cdot \lg \frac{2.000 \text{ V}^2}{0.031 \text{ V}^2} \approx 18.10 \text{ dB}.$$

g) Die erste Aussage ist richtig, denn es gilt:

$$K^2 = \frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}{A_1^2}.$$

Dagegen gilt für den Kehrwert des Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnisses:

$$\frac{1}{\rho_V} = \frac{(A_1 - A_x)^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}{A_x^2}.$$

Bei der Berechnung der Verzerrungsleistung P_V wird auch eine Verfälschung der Grundwellenamplitude (diese ist nun A_1 anstelle von A_x) berücksichtigt. Außerdem wird die Verzerrungsleistung nicht auf A_1^2 , sondern auf A_x^2 bezogen. Allgemein gilt zwischen dem Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis und dem Klirrfaktor folgender Zusammenhang:

$$\rho_V = \frac{A_x^2}{(A_1 - A_x)^2 + K^2 \cdot A_1^2}.$$

Mit $A_1 = A_x$ vereinfacht sich diese Gleichung wie folgt:

$$\rho_V = \frac{1}{K^2}.$$

Ein Klirrfaktor von 1% entspricht in diesem Fall dem Ergebnis $10 \cdot \lg \rho_V = 40$ dB. Mit dem Klirrfaktor $K = 0.125$ aus Teilaufgabe b) hätte man mit der Näherung $A_1 \approx A_x$ sofort $10 \cdot \lg \rho_V = 18.06$ dB erhalten. Der unter Punkt f) errechnete tatsächliche Wert (18.10 dB) weicht hiervon nicht all zu sehr ab. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.4

a) Ist der Eingangsimpuls $x(t)$ rechteckförmig, so ist auch $x^2(t)$ ein Rechteck mit Höhe A_x^2 im Bereich von 0 bis T_x und außerhalb 0. Auch das gesamte Ausgangssignal $y(t)$ ist somit rechteckförmig mit der Amplitude

$$A_y = c_1 \cdot A_x + c_2 \cdot A_x^2.$$

Für die Impulsdauer gilt $T_y = T_x$. Richtig ist also nur der letzte Lösungsvorschlag.

b) Mit den beiden ersten Parametersätzen kann folgendes lineares Gleichungssystem angegeben werden:

$$\begin{aligned}c_1 \cdot 1 \text{ V} + c_2 \cdot (1 \text{ V})^2 &= 0.55 \text{ V}, \\c_1 \cdot 2 \text{ V} + c_2 \cdot (2 \text{ V})^2 &= 1.20 \text{ V}.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit -2 und Addition der beiden Gleichungen erhält man:

$$c_2 \cdot 2 \text{ V}^2 = 0.1 \text{ V} \Rightarrow c_2 = \underline{0.05 \text{ 1/V}}.$$

Der Linearkoeffizient ist somit $c_1 = \underline{0.5}$. Der dritte Parametersatz kann genutzt werden, um das Ergebnis zu kontrollieren:

$$c_1 \cdot 3 \text{ V} + c_2 \cdot (3 \text{ V})^2 = 0.5 \cdot 3 \text{ V} + 0.05 \frac{1}{\text{V}} \cdot 9 \text{ V}^2 = 1.95 \text{ V}.$$

c) Die Angabe eines Klirrfaktors bedingt die Verwendung einer harmonischen Schwingung am Eingang. Ist $X_+(f) = 1 \text{ V} \cdot \delta(f - f_0)$, so lautet das Spektrum des analytischen Signals am Ausgang:

$$Y_+(f) = \frac{c_2}{2} \cdot A_x^2 \cdot \delta(f) + c_1 \cdot A_x \cdot \delta(f - f_0) + \frac{c_2}{2} \cdot A_x^2 \cdot \delta(f - 2f_0).$$

Die Diracfunktion bei $f = 0$ folgt aus der trigonometrischen Umformung $\cos^2(\alpha) = 1/2 + 1/2 \cdot \cos(\alpha)$. Mit $A_1 = c_1 \cdot A_x = 0.5 \text{ V}$ und $A_2 = (c_2/2) \cdot A_x^2 = 0.025 \text{ V}$ ergibt sich somit für den Klirrfaktor:

$$K = \frac{A_2}{A_1} = \frac{c_2/2 \cdot A_x}{c_1} = \frac{0.025}{0.5} = \underline{5\%}.$$

d) Entsprechend der Musterlösung zu c) ist K proportional zu A_x . Deshalb erhält man nun $\underline{K = 15\%}$.

e) Nun lautet das Ausgangssignal:

$$y(t) = c_1 \cdot A_x \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T_x}\right) + c_2 \cdot A_x^2 \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T_x}\right)^2.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $t = T_x/2$ treten folgende Werte auf:

$$\begin{aligned}y(t = 0) &= c_1 \cdot A_x + c_2 \cdot A_x^2 = \underline{1.95 \text{ V}} \\y(t = T_x/2) &= c_1 \cdot A_x \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot A_x^2 \cdot \frac{1}{4} = 0.75 \text{ V} + 0.1125 \text{ V} = \underline{0.8625 \text{ V}}.\end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.5

- a) Durch die Angabe eines Frequenzgangs wird bereits implizit ein lineares System vorausgesetzt, so dass nichtlineare Verzerrungen nicht auftreten können. Da $H(f)$ rein reell ist, können Phasenverzerrungen ebenfalls ausgeschlossen werden \Rightarrow Lösungsvorschläge 1 und 3.
- b) Das Ausgangssignal ist $y_1(t) = x_1(t)$. Somit ist das System nicht nur verzerrungsfrei, sondern kann für diese Anwendung auch als ideal bezeichnet werden. Richtig sind also die Alternativen 1 und 2.
- c) In diesem Fall erhält man das Ausgangssignal:

$$y_1(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t).$$

Während der Anteil bei f_1 unverändert übertragen wird, ist der Sinusanteil mit f_2 auf ein Viertel gedämpft. Also liegen Dämpfungsverzerrungen vor \Rightarrow Antwort 3.

- d) Das Ausgangssignal $y_2(t)$ hat folgende Form, wenn man die Grundfrequenz $f_0 = 3 \text{ kHz}$ berücksichtigt:

$$y_2(t) = \frac{8 \text{ V}}{\pi^2} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \cos(3\omega_0 t) \right).$$

Der Faktor $3/8$ beschreibt $H(f = 9 \text{ kHz})$. Alle weiteren Spektralanteile bei 15 kHz , 21 kHz usw. werden vom System unterdrückt.

Die stärksten Abweichungen zwischen $x_2(t)$ und $y_2(t)$ wird es bei den Dreieckspitzen geben, da sich hier die fehlenden hohen Frequenzen am stärksten auswirken. Zum Beispiel erhält man für $t = t_0 = 0$:

$$y_2(t = 0) = \frac{8 \text{ V}}{\pi^2} \left(1 + \frac{3}{72} \right) = 0.844 \text{ V}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{\max} = |y_2(t = 0) - x_2(t = 0)| = \underline{0.156 \text{ V}}.$$

- e) Mit der Grundfrequenz $f_0 = 2 \text{ kHz}$, $H(3f_0) = 0.75$, $H(5f_0) = 0.25$ und $H(7f_0) = 0$ ergibt sich:

$$y_2(t = 0) = \frac{8 \text{ V}}{\pi^2} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25} \right) = 0.886 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\max} = \underline{0.114 \text{ V}}.$$

- f) Im Bereich bis 4 kHz ist $H_E(f) = H(f) = 1$ zu sehen. Dagegen gilt im Bereich von 4 kHz bis 12 kHz :

$$H_E(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1.5 \cdot [1 - f/(12 \text{ kHz})]} \quad \Rightarrow \quad H_E(f = 10 \text{ kHz}) = \underline{4}.$$

Der Nennerausdruck beschreibt hierbei die Geradengleichung des Flankenabfalls.

- g) Sowohl $x_2(t)$ als auch $x_3(t)$ beinhalten Spektralanteile bei Frequenzen größer als 12 kHz . Wurden diese durch die Bandbegrenzung von $H(f)$ abgeschnitten, so können sie durch den Entzerrer nicht mehr rekonstruiert werden. Das heißt, dass nur das Signal $x_1(t)$ durch $H_E(f)$ wieder hergestellt werden kann:

$$z_1(t) = 1 \cdot 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t).$$

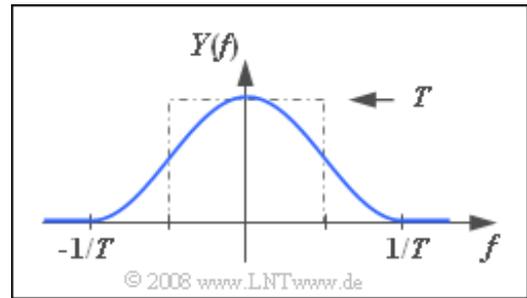
Die jeweils ersten Faktoren geben jeweils die Verstärkung von $H_E(f)$ an \Rightarrow Antwort 1.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.5

a) Mit dem konstanten Spektrum $X(f) = T$ erhält man für die Spektralfunktion des Empfänger Ausgangssignals $y(t)$:

$$Y(f) = T \cdot H(f).$$

Der Signalwert bei $t = 0$ ist gleich der Fläche unter $Y(f)$. Wie aus der nebenstehenden Skizze hervorgeht, ist diese gleich 1. Daraus folgt: $y(t = 0) = 1$.



b) Aus der Bedingung $H_S(f) \cdot H_E(f) = H(f)$ folgt im betrachteten Bereich:

$$H_E(f) = \frac{H(f)}{H_S(f)} = \frac{\cos^2(\pi fT/2)}{\sin(\pi fT)/(\pi fT)}.$$

Wegen $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ gilt auch $H_E(f=0) = 1$. Mit der gegebenen trigonometrischen Umformung gilt weiter:

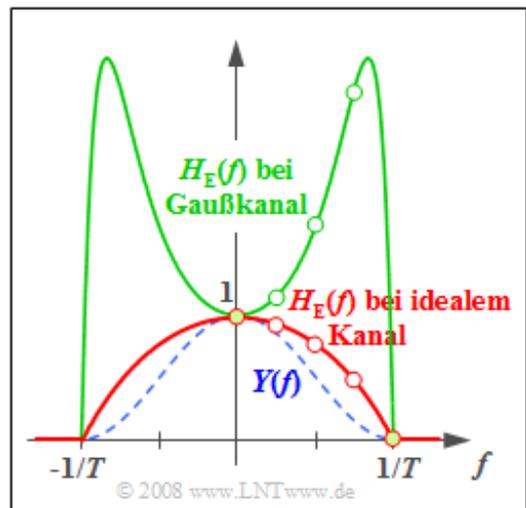
$$H_E(f) = \frac{\pi fT}{2} \cdot \cot\left(\frac{\pi fT}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} H_E(f \cdot T = 0.25) &= \frac{\pi}{8} \cdot \cot(22.5^\circ) = \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot 2.414 = \underline{0.948}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_E(f \cdot T = 0.5) &= \frac{\pi}{4} \cdot \cot(45^\circ) = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \underline{0.785}, \end{aligned}$$

$$H_E(f \cdot T = 0.75) = \frac{3\pi}{8} \cdot \cot(67.5^\circ) = \frac{3\pi}{8} \cdot 0.414 = \underline{0.488},$$

$$H_E(f \cdot T = 1) = \frac{\pi}{2} \cdot \cot(90^\circ) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = \underline{0}.$$



c) Unter Berücksichtigung des Gaußkanals gilt:

$$H_E(f) = \frac{H(f)}{H_S(f) \cdot H_K(f)} = H_E^{(b)}(f) \cdot e^{\pi(fT)^2}.$$

$H_E^{(b)}(f)$ bezeichnet den unter Punkt b) berechneten Entzerrerfrequenzgang unter der Voraussetzung eines idealen Kanals. Man erhält folgende numerische Ergebnisse:

$$\begin{aligned} H_E(f \cdot T = 0) &= 1 \cdot e^0 = \underline{1}, \\ H_E(f \cdot T = 0.25) &= 0.948 \cdot 1.217 = \underline{1.154}, \\ H_E(f \cdot T = 0.5) &= 0.785 \cdot 2.193 = \underline{1.722}, \\ H_E(f \cdot T = 0.75) &= 0.488 \cdot 5.854 = \underline{2.857}, \\ H_E(f \cdot T = 1) &= 0 \cdot 23.141 = \underline{0}. \end{aligned}$$

Die obige Grafik fasst die Ergebnisse dieser Aufgabe zusammen.

Musterlösung zur Aufgabe A2.6

a) Mit $z_1 = 1$, $T_1 = 0$ und $z_2 = 0$ ist $h(t) = \delta(t)$ und dementsprechend $H(f) = 1$, so dass stets $y(t) = x(t)$ gelten wird. Jede verzerrungsfreie Kanalimpulsantwort $h(t)$ besteht aus einer einzigen Diracfunktion, zum Beispiel bei $t = T_1$. Dieser Fall ist im Modell durch $z_2 = 0$ berücksichtigt. Damit lautet der Frequenzgang:

$$H(f) = z_1 \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T_1},$$

und es wird $y(t) = z_1 \cdot x(t - T_1)$ gelten. Dagegen wird der Kanal immer dann zu linearen Verzerrungen führen, wenn gleichzeitig z_1 und z_2 von 0 verschieden sind. Richtig sind demnach die Aussagen 1 und 2.

b) Die Fouriertransformation der Impulsantwort $h(t)$ führt auf die Gleichung:

$$H(f) = z_1 \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T_1} + z_2 \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T_2}.$$

Mit $z_1 = 1$, $T_1 = 0$, $z_2 = 0.5$, $T_2 = 1$ ms erhält man daraus:

$$H(f) = 1 + 0.5 \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T_2}.$$

Aufgeschlüsselt nach Real- und Imaginärteil liefert dies:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(f)] &= 1 + 0.5 \cdot \cos(2\pi f \cdot 1 \text{ ms}), \\ \operatorname{Im}[H(f)] &= -0.5 \cdot \sin(2\pi f \cdot 1 \text{ ms}). \end{aligned}$$

Bei der Frequenz $f = f_1 = 1$ kHz – und auch allen Vielfachen davon – ist der Realteil gleich 1.5 und der Imaginärteil verschwindet.

c) Aus dem Ergebnis aus b) folgt weiter, dass bei allen Vielfachen von $f_1 = 1$ kHz der Betragsfunktion $|H(f)| = 1.5$ und die Phasenfunktion $b(f) = 0$ ist. Damit ist für diese diskreten Frequenzwerte auch die Phasenlaufzeit jeweils 0. Da aber das Spektrum $X_1(f)$ des Diracpulses genau bei diesen Frequenzen Spektrallinien aufweist, gilt $y(t) = 1.5 \cdot x(t)$. Damit ist allein die erste Antwort richtig.

d) Die Betragsfunktion lautet:

$$\begin{aligned} |H(f)| &= \sqrt{\operatorname{Re}[H(f)]^2 + \operatorname{Im}[H(f)]^2} = \\ &= \sqrt{1 + 0.25 \cdot \cos^2(2\pi f \cdot T_2) + \cos(2\pi f \cdot T_2) + 0.25 \cdot \sin^2(2\pi f \cdot T_2)} = \\ &= \sqrt{1.25 + \cos(2\pi f \cdot T_2)}. \end{aligned}$$

Für die Frequenz $f_2 = 0.25$ kHz erhält man somit:

$$|H(f)| = \sqrt{1.25 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{1.25} = 1.118.$$

Die Phasenfunktion lautet allgemein bzw. bei der Frequenz f_2 :

$$\begin{aligned} b(f) &= -\arctan \frac{\operatorname{Im}[H(f)]}{\operatorname{Re}[H(f)]} = -\arctan \frac{-0.5 \cdot \sin(2\pi f T_2)}{1 + 0.5 \cdot \cos(2\pi f T_2)}, \\ b(f = f_2) &= -\arctan \frac{-0.5 \cdot \sin(\pi/2)}{1 + 0.5 \cdot \cos(\pi/2)} = \arctan \frac{0.5}{1} = 0.464. \end{aligned}$$

Damit beträgt die Phasenlaufzeit für diese Frequenz:

$$\tau_2 = \frac{b(f_2)}{2\pi f_2} = \frac{0.464}{2\pi \cdot 0.25 \text{ kHz}} \approx 0.3 \text{ ms},$$

und es gilt für das Ausgangssignal:

$$y_2(t) = 1.118 \cdot \cos(2\pi \cdot 0.25 \text{ kHz} \cdot (t - 0.3 \text{ ms})).$$

Der Signalwert zum Nullzeitpunkt ist somit:

$$y_2(t = 0) = 1.118 \cdot \cos(-2\pi \cdot 0.25 \text{ kHz} \cdot 0.3 \text{ ms}) \approx 1.118 \cdot 0.891 = \underline{0.996}.$$

e) Beide Frequenzen werden mit dem gleichen Dämpfungsfaktor $\alpha = 1.118$ beaufschlagt; daher sind keine Dämpfungsverzerrungen festzustellen.

Mit $f_3 = 1.25 \text{ kHz}$ und $T_2 = 1 \text{ ms}$ ergibt sich für die Phasenfunktion:

$$b(f = f_3) = -\arctan \frac{-0.5 \cdot \sin(2.5\pi)}{1 + 0.5 \cdot \cos(2.5\pi)} = 0.464 = b(f = f_2),$$

also genau der gleiche Wert wie bei der Frequenz $f_2 = 0.25 \text{ kHz}$. Trotzdem kommt es aber nun zu Phasenverzerrungen, da für f_3 die Phasenlaufzeit nur mehr $\tau_3 = 60 \mu\text{s}$ beträgt.

Für das Ausgangssignal kann also geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= 1.118 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot (t - 0.3 \text{ ms})) + 1.118 \cdot \cos(2\pi f_3 \cdot (t - 0.06 \text{ ms})) = \\ &= 1.118 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot t - 27^\circ) + 1.118 \cdot \cos(2\pi f_3 \cdot t - 27^\circ). \end{aligned}$$

Es gibt also Phasenverzerrungen \Rightarrow Antwort 3, obwohl für beide Schwingungen $\varphi_2 = \varphi_3 = 27^\circ$ gilt. Damit keine Phasenverzerrungen auftreten, müssten die Phasenlaufzeiten τ_2 und τ_3 gleich sein und die Phasenwerte φ_2 und φ_3 linear mit den zugehörigen Frequenzen ansteigen.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.6

a) Für das Bandpass-Signal nach dem zweiten Multiplizierer gilt:

$$b(t) = r(t) \cdot z_E(t) = q(t) \cdot z(t) \cdot z_E(t) = K \cdot q(t) \cdot \cos^2(\omega_T t).$$

Mit der trigonometrischen Beziehung

$$\cos^2(\omega_T t) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2\omega_T t)]$$

erhält man

$$b(t) = \frac{K}{2} \cdot q(t) + \frac{K}{2} \cdot q(t) \cdot \cos(2\omega_T t).$$

Der zweite Anteil liegt um die doppelte Trägerfrequenz und wird durch den Tiefpass – zum Beispiel mit der Grenzfrequenz f_T – entfernt. Damit erhält man:

$$v(t) = \frac{K}{2} \cdot q(t).$$

Mit $K=2$ ergibt sich eine ideale Demodulation:

$$v(t) = q(t).$$

b) Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\cos(\omega_T t) \cdot \cos(\omega_T t - \Delta\varphi) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\Delta\varphi) + \cos(2\omega_T t - \Delta\varphi)]$$

sowie des nachgeschalteten Tiefpasses, der wieder den Anteil um die doppelte Trägerfrequenz entfernt, erhält man hier mit $K=2$:

$$v(t) = q(t) \cdot \cos(\Delta\varphi).$$

Das heißt, ein Phasenversatz $\Delta\varphi$ führt hier nur zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung und nicht zu Dämpfungs- oder Phasenverzerrungen. Ein Phasenversatz um $\pm 60^\circ$ hat jeweils eine Halbierung des Signals zur Folge. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 5.

c) Richtig ist hier der Lösungsvorschlag 4. Bei beiden Summanden tritt genau der gleiche Phasenversatz $\Delta\varphi$ auf, und es kommt hier zu Phasenverzerrungen:

$$v(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_2 \cdot (t - \tau_2)) + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_5 t \cdot (t - \tau_5)),$$

$$\text{wobei } \tau_2 = \frac{\Delta\varphi}{\omega_2} \neq \tau_5 = \frac{\Delta\varphi}{\omega_5}.$$

Ein Phasenversatz von 60° entsprechend $\pi/3$ führt hier zu den Verzögerungszeiten:

$$\tau_2 = \frac{\pi/3}{2\pi \cdot 2 \text{ kHz}} \approx 83.3 \mu\text{s}, \quad \tau_5 = \frac{\pi/3}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx 33.3 \mu\text{s}.$$

Das niederfrequenter Signal wird also stärker verzögert.

Musterlösung zur Aufgabe A2.7

a) Die Lösung im Zeitbereich führt schneller zum Endergebnis:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \star h(t) = \\ &= x_1(t) \star \delta(t) + x_1(t) \star \delta(t - T) = x_1(t) + x_1(t - T). \end{aligned}$$

Somit ist $y_1(t)$ ein Rechteckimpuls der Höhe 1 und der Breite $2T$.

Zum gleichen Ergebnis – aber zeitaufwändiger – kommt man durch die Berechnung im Spektralbereich:

$$Y_1(f) = X_1(f) \cdot H(f) = T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot e^{-j \cdot \pi f T} \cdot [1 + e^{-j \cdot 2\pi f T}].$$

Die komplexen Exponentialfunktionen können mit dem Satz von Euler wie folgt umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} e^{-j \cdot \pi f T} [1 + e^{-j \cdot 2\pi f T}] &= e^{-j \cdot 2\pi f T} \cdot [e^{j \cdot \pi f T} + e^{-j \cdot \pi f T}] = \\ &= e^{-j \cdot 2\pi f T} \cdot 2 \cos(\pi f T). \end{aligned}$$

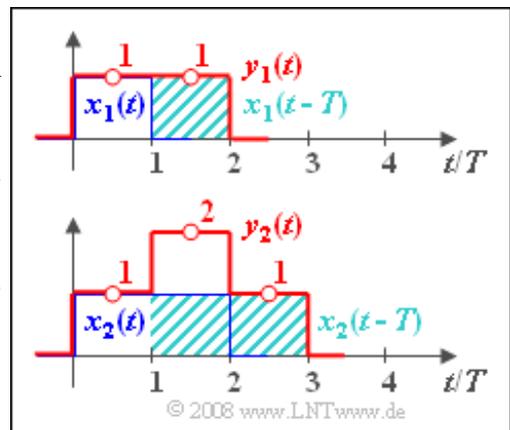
Somit kann für das Ausgangsspektrum geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= Y_{11}(f) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T}, \\ Y_{11}(f) &= 2T \cdot \frac{\sin(\pi f T) \cdot \cos(\pi f T)}{\pi f T} = 2T \cdot \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T}. \end{aligned}$$

Hierbei ist die Beziehung $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)/2$ verwendet.

Die Fourier rücktransformation von $Y_{11}(f)$ führt zu einem um $t = 0$ symmetrischen Rechteck der Breite $2T$. Durch die Phasenfunktion wird dieser in den Bereich $0 \dots 2T$ verschoben und das Ergebnis der Zeitbereichsberechnung bestätigt.

Trotz der Tatsache, dass $y_1(t)$ ebenso wie $x_1(t)$ rechteckförmig ist, liegen hier Verzerrungen vor. Wegen $T_y > T_x$ sind diese linear. Im interessierenden Frequenzbereich – das sind bei einem si-förmigem Spektrum alle Frequenzen – ist $|H(f)|$ nicht konstant. Also gibt es Dämpfungsverzerrungen.



Da zudem die Phase nicht im gesamten Bereich linear mit f ansteigt, gibt es auch Phasenverzerrungen. Das bedeutet: Alle Lösungsvorschläge treffen zu mit Ausnahme von 2.

b) Aufgrund der bereits in a) angegebenen Gleichung

$$y_2(t) = x_2(t) + x_2(t - T)$$

erhält man einen stufenförmigen Verlauf entsprechend obiger Grafik. Die gesuchten Werte sind:

$$y_2(t = 0.5T) \equiv \underline{1}, \quad y_2(t = 1.5T) \equiv \underline{2}, \quad y_2(t = 2.5T) \equiv \underline{1}.$$

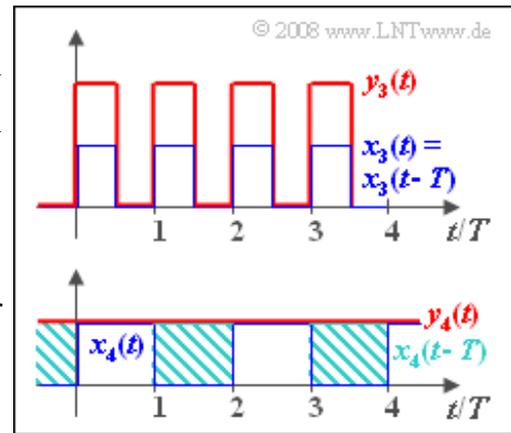
c) Die Periodendauer $T_0 = T$ des periodischen Signals $x_3(t)$ ist genau so groß wie die Verzögerung auf

dem zweiten Pfad. Deshalb ist $y_3(t) = 2 \cdot x_3(t)$ und es sind keine Verzerrungen feststellbar.

Die Spektralbereichsberechnung führt zum gleichen Ergebnis. $X_3(f)$ ist ein Linienspektrum mit Anteilen bei den Frequenzen $f = 0, f = \pm f_0 = \pm 1/T, f = \pm 3f_0$ usw.. Bei diesen diskreten Frequenzen gilt aber exakt:

$$|H(f)| = 2, \quad b(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_P(f) = 0.$$

Auch daraus folgt wieder $y_3(t) = 2 \cdot x_3(t)$. Richtig ist somit nur der Lösungsvorschlag 1.



d) Aus der unteren Skizze obiger Grafik geht hervor, dass $y_4(t) = 1$ gegenüber $x_4(t)$ verzerrt ist. Dabei handelt es sich um Dämpfungsverzerrungen \Rightarrow Lösungsvorschlag 2, wie die folgende Überlegung zeigt. Wegen $T_0 = 2T$ weist das Signal $x_4(t)$ die Grundfrequenz $f_0 = 1/(2T)$ auf. Bei allen ungeraden Vielfachen von f_0 hat somit der Frequenzgang Nullstellen. Die einzige verbleibende Spektrallinie von $Y_4(f)$ liegt bei $f = 0$, wobei gilt:

$$Y_4(f) = 2 \cdot 0.5 \cdot \delta(f) = 1 \cdot \delta(f) \quad \Rightarrow \quad y_4(t) = 1.$$

e) Der Frequenzgang lautet nun mit $T_1 = 1$ ms, $T_2 = 5$ ms und $T = T_2 - T_1 = 4$ ms:

$$H(f) = e^{-j \cdot 2\pi f T_1} + e^{-j \cdot 2\pi f T_2} = [1 + e^{-j \cdot 2\pi f T}] \cdot e^{-j \cdot 2\pi f T_1}.$$

Der Klammerausdruck beschreibt den bereits bisher betrachteten Frequenzgang. Der zweite Term bewirkt eine zusätzliche Laufzeit um T_1 , und es gilt für alle Signale ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$y_i^{(e)}(t) = y_i(t - T_1).$$

Alle Aussagen hinsichtlich der Verzögerungen sind weiter gültig. Dies entspricht dem Lösungsvorschlag 1.