

Musterlösung zur Aufgabe A3.1

a) Mit der angegebenen Übertragungsfunktion kann man nach dem Spannungsteilerprinzip

$$H_1(f = 0) = 0, \quad H_1(f \rightarrow \infty) = 1$$

berechnen \Rightarrow Es handelt sich um einen Hochpass. Für sehr niedrige Frequenzen stellt die Induktivität L einen Kurzschluss dar.

b) Jedes reale Netzwerk ist kausal. Die Impulsantwort $h(t)$ ist gleich dem Ausgangssignal $y(t)$, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ am Eingang ein extrem kurzfristiger Impuls – ein sog. Diracimpuls – angelegt wird. Aus Kausalitätsgründen kann dann natürlich am Ausgang nicht schon für Zeiten $t < 0$ ein Signal auftreten:

$$y(t) = h(t) = 0 \text{ für } t < 0.$$

Formal lässt sich dies folgendermaßen zeigen: Die Hochpass–Übertragungsfunktion $H_1(f)$ kann wie folgt umgeformt werden:

$$H_1(f) = \frac{j \cdot f / f_G}{1 + j \cdot f / f_G} = 1 - \frac{1}{1 + j \cdot f / f_G}.$$

Die zweite Übertragungsfunktion beschreibt die zu $H_1(f)$ äquivalente Tiefpassfunktion, die im Zeitbereich zur Exponentialfunktion führt. Die „1“ wird zu einer Diracfunktion. Mit $T = 2\pi \cdot f_G$ gilt somit für $t \geq 0$:

$$h_1(t) = \delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}.$$

Für $t < 0$ gilt dagegen $h_1(t) = 0$, womit die Kausalität nachgewiesen wäre \Rightarrow Antwort Ja.

c) Die Hintereinanderschaltung zweier Hochpässe führt zu folgender Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} H_2(f) &= [H_1(f)]^2 = \frac{[j \cdot f / f_G]^2}{[1 + j \cdot f / f_G]^2} = \frac{[j \cdot f / f_G]^2 \cdot [(1 - j \cdot f / f_G)]^2}{[(1 + j \cdot f / f_G) \cdot (1 - j \cdot f / f_G)]^2} = \\ &= \frac{(f/f_G)^4 - (f/f_G)^2 + j \cdot 2 \cdot (f/f_G)^3}{[1 + (f/f_G)^2]^2}. \end{aligned}$$

Mit $f = f_G$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} H_2(f = f_G) &= \frac{1 - 1 + j \cdot 2}{4} = \frac{j}{2} \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \{H_2(f = f_G)\} &= 0, \quad \operatorname{Im} \{H_2(f = f_G)\} = 0.5. \end{aligned}$$

d) Richtig sind hier die beiden ersten Lösungsvorschläge. Da $h_1(t) = 0$ für $t < 0$ ist, erfüllt auch die Faltungsoperation $h_2(t) = h_1(t) * h_1(t)$ die Kausalitätsbedingung. Ebenso ergibt die n -fache Faltung eine kausale Impulsantwort:

$$h_n(t) = 0 \text{ für } t < 0.$$

Bei kausaler Impulsantwort $h_2(t)$ hängen aber der Real- und der Imaginärteil der Spektralfunktion $H_2(f)$ über die Hilbert-Transformation zusammen. Mit der Abkürzung $x = f/f_G$ und dem Ergebnis aus der

Teilaufgabe c) gilt somit:

$$\frac{x^4 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} \bullet \longrightarrow \frac{2x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.1

a) Die Fourier-Transformierte von $h_1(t) = \alpha \cdot \delta(t)$ lautet:

$$H_1(f) = \alpha \Rightarrow \operatorname{Re}\{H_1(f)\} = \alpha, \operatorname{Im}\{H_1(f)\} = 0.$$

Richtig ist somit der zweite Lösungsvorschlag.

b) Mit dem **Verschiebungssatz** und dem **Satz von Euler** erhält man für die Impulsantwort $h_2(t)$ den Frequenzgang:

$$H_2(f) = e^{-j2\pi f\tau} = \cos(2\pi f\tau) - j \cdot \sin(2\pi f\tau).$$

Daraus ergibt sich die Hilbert-Korrespondenz

$$\cos(2\pi f\tau) \longleftarrow \bullet \quad -\sin(2\pi f\tau) \quad \text{oder} \quad \cos(2\pi f\tau) \quad \bullet \longrightarrow \sin(2\pi f\tau).$$

entsprechend dem letzten Lösungsvorschlag.

c) Für die rechteckförmige Impulsantwort $h_3(t)$ mit der Breite T und der Höhe $1/T$ erhält man die Spektralfunktion entsprechend dem ersten Fourierintegral:

$$\begin{aligned} H_3(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \left[\frac{1}{-j \cdot 2\pi fT} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_0^T = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{j \cdot 2\pi fT}. \end{aligned}$$

Mit dem Eulerschen Satz kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H_3(f) &= \frac{1 - \cos(2\pi fT) + j \cdot \sin(2\pi fT)}{j \cdot 2\pi fT} = \\ &= \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} - j \cdot \frac{1 - \cos(2\pi fT)}{2\pi fT}. \end{aligned}$$

Weiter gilt mit der Umformung $1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2(\alpha/2)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H_3(f)\} &= \operatorname{si}(2\pi fT) \quad \text{mit} \quad \operatorname{si}(x) = \sin(x)/x, \\ \operatorname{Im}\{H_3(f)\} &= -\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi fT} = -\operatorname{si}(\pi fT) \cdot \sin(\pi fT). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass beide Lösungsalternativen richtig sind.

d) Nein. Die Impulsantwort $h_4(t)$ ist nicht kausal, so dass aus dem dazugehörigen Fourier-Spektrum $H_4(f)$ keine Hilbert-Korrespondenz abgeleitet werden kann.

Musterlösung zur Aufgabe A3.2

a) Entsprechend der Laplace-Definition gilt mit den vorgegebenen Gleichungen:

$$X_L(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 \cdot T) \cdot e^{-pt} dt = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Richtig ist somit der Vorschlag 2. Der Vorschlag 3 scheitert von vorneherein aus, da $X_L(p)$ die Einheit „Sekunde“ aufweisen muss (Integral über die Zeit), während p und ω_0 jeweils die Einheit 1/s besitzen.

b) Hier gilt bei gleicher Vorgehensweise wie in der Teilaufgabe a):

$$Y_L(p) = \int_0^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot T) \cdot e^{-pt} dt = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Richtig ist hier somit der Lösungsvorschlag 1.

c) Die p -Übertragungsfunktion der kausalen si-Funktion lautet mit dem vorne angegebenen Integral:

$$Z_L(p) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T} \cdot e^{-pt} dt = \frac{T}{\pi} \cdot \arctan \frac{\pi}{p \cdot T} \Rightarrow \underline{\text{Vorschlag 3}}.$$

Vorschlag 1 gilt nur für die Fouriertransformierte der akausalen si-Funktion. Vorschlag 2 kann schon allein deshalb nicht stimmen, da hier das Argument der Arcustangens-Funktion dimensionsbehaftet ist.

d) Aus $z(t) = s(t) \cdot \gamma(t)$ folgt mit dem Faltungssatz:

$$Z(f) = S(f) \star \Gamma(f) = \frac{1}{2} \cdot S(f) \star \delta(f) + S(f) \star \frac{1}{j \cdot 2\pi f}.$$

Da $S(f)$ reell ist, ergibt sich der Realteil von $Z(f)$ als der erste Term dieser Gleichung:

$$\text{Re}\{Z(f)\} = \frac{1}{2} \cdot S(f) \star \delta(f) = \frac{1}{2} \cdot S(f).$$

Der Realteil von $Z(f)$ hat somit die gleiche Rechteckform wie $S(f)$, ist aber nur halb so hoch:

$$\text{Re}\{Z(f)\} = \begin{cases} T/2 & \text{für } |f| < 1/(2T), \\ 0 & \text{für } |f| > 1/(2T). \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{Vorschlag 1}}.$$

e) Mit dem Ergebnis aus d) folgt für den Imaginärteil:

$$\text{Im}\{Z(f)\} = S(f) \star \frac{(-1)}{j \cdot 2\pi f}.$$

Für hinreichend große Frequenzen ($f \geq 1/(2T)$) liefert dieses Faltungsintegral:

$$\text{Im}\{Z(f)\} = -T \cdot \int_{f-1/(2T)}^{f+1/(2T)} \frac{1}{2\pi x} dx = \frac{T}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{f - 1/(2T)}{f + 1/(2T)} \right|.$$

Richtig ist somit der zweite Vorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.2

a) Berücksichtigt man, dass die Diracfunktion nur bei $t = 0$ ungleich 0 ist und das Integral über den Dirac den Wert 1 liefert, solange das Integrationsintervall den Zeitpunkt $t = 0$ einschließt, so erhält man:

$$A(f) = 1, \quad A_L(p) = 1.$$

Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3.

b) Richtig sind wiederum die Lösungsvorschläge 1 und 3. Die Sprungfunktion $\gamma(t)$ ist das Integral über die Diracfunktion $\delta(t)$, so dass man den Integrationsatz anwenden kann:

$$b(t) = \int_{-\infty}^t a(\tau) d\tau \Rightarrow B_L(p) = A_L(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p},$$
$$B(f) = A(f) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2\pi f} \right] = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2\pi f}.$$

c) Richtig sind die vorgeschlagenen Alternativen 2 und 3. Nachdem die (kausale) Rechteckfunktion als Differenz zweier Sprungfunktionen dargestellt werden kann, erhält man mit dem Verschiebungssatz:

$$c(t) = b(t) - b(t - T) \Rightarrow C_L(p) = B_L(p) - B_L(p) \cdot e^{-pT} = \frac{1}{p} \cdot [1 - e^{-pT}].$$

Da die Rechteckfunktion eine endliche Energie besitzt, gilt für das Fourierspektrum:

$$C(f) = C_L(p) \Big|_{p=j2\pi f} = \frac{1}{j \cdot 2\pi f} \cdot [1 - e^{-j \cdot 2\pi f T}].$$

Nach einigen trigonometrischen Umformungen kann hierfür auch geschrieben werden:

$$C(f) = T \cdot \text{si}(2\pi f T) + j \cdot \frac{\cos(2\pi f T) - 1}{2\pi f}.$$

d) Richtig ist der erste Lösungsvorschlag. Es gilt:

$$d(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^t c(\tau) d\tau \Rightarrow D_L(p) = C_L(p) \cdot \frac{1}{p \cdot T} = \frac{1 - e^{-pT}}{p^2 \cdot T}.$$

Da sich $d(t)$ bis ins Unendliche erstreckt, ist der einfache Zusammenhang zwischen $D_L(p)$ und $D(f)$ entsprechend dem Lösungsvorschlag 3 nicht gegeben. $D(f)$ beinhaltet vielmehr auch eine Diracfunktion bei der Frequenz $f = 0$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.3

a) Nach dem Spannungsteilerprinzip kann für die p -Übertragungsfunktion geschrieben werden:

$$H_L(p) = \frac{pL + 1/(pC)}{R + pL + 1/(pC)} = \frac{p^2 \cdot LC + 1}{p^2 \cdot LC + p \cdot RC + 1}.$$

Die beiden gewünschten Grenzübergänge ergeben sich zu

$$\underline{H_L(p \rightarrow 0) = 1, \quad H_L(p \rightarrow \infty) = 1.}$$

Daraus folgt, dass es sich weder um einen Tiefpass noch um einen Hochpass handeln kann. Sowohl bei sehr niedrigen als auch bei sehr hohen Frequenzen gilt $y(t) = x(t)$.

b) Ersetzt man p durch $j \cdot 2\pi f$, so erhält man

$$H(f) = \frac{1 - (2\pi f)^2 \cdot LC}{1 - (2\pi f)^2 \cdot LC + j \cdot 2\pi f \cdot RC}.$$

Es gibt also stets eine Frequenz, bei der der Zähler 0 ist, nämlich die Resonanzfrequenz von L und C . Für diese Frequenz $f_0 = 1 \text{ MHz}/2\pi$ wirkt die Reihenschaltung von L und C wie ein Kurzschluss. Daraus folgt: Unabhängig von den Werten von R , L und C handelt es sich um eine Bandsperre (Lösungsvorschlag 2).

c) Entsprechend dem Angabenblatt gilt:

$$A = \frac{R}{2L} = \frac{50 \Omega}{2 \cdot 10 \mu\text{H}} = \frac{50 \Omega}{2 \cdot 10^{-5} \Omega\text{s}} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ 1/s},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-5} \Omega\text{s} \cdot 25 \cdot 10^{-9} \text{s}/\Omega}} = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/s}.$$

d) Mit $A = R/(2L)$ und $B^2 = 1/(LC)$ erhält man aus der in (a) ermittelten p -Übertragungsfunktion:

$$H_L(p) = \frac{p^2 + 1/(LC)}{p^2 + p \cdot R/L + 1/(LC)} = \frac{p^2 + B^2}{p^2 + 2A \cdot p + B^2}.$$

Das Zählerpolynom $Z(p)$ und das Nennerpolynom $N(p)$ sind jeweils quadratisch $\Rightarrow \underline{Z = N = 2}$. Der konstante Faktor ergibt sich hier zu $\underline{K = 1}$.

e) Die Lösung der Gleichung $p^2 + B^2 = 0$ führt zum Ergebnis $p = \pm j \cdot B$ und damit zu den Nullstellen

$$\text{Re}\{p_{o1}\} = \underline{0}, \quad \text{Im}\{p_{o1}\} = 2.5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = \underline{2.5 \frac{1}{\mu\text{s}}},$$

$$\text{Re}\{p_{o2}\} = \underline{0}, \quad \text{Im}\{p_{o2}\} = -2.5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = \underline{-2.5 \frac{1}{\mu\text{s}}}.$$

Die Normierung der Frequenzvariablen p und aller Pole und Nullstellen auf die Einheit $(\mu\text{s})^{-1}$ vereinfacht die numerische Auswertung, insbesondere im Zeitbereich. Verzichtet man auf die Einheit ganz, so ergeben sich alle t -Werte in Mikrosekunden.

f) Setzt man das Nennerpolynom $N(p)$ gleich 0, so ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung:

$$p^2 + 2A \cdot p + B^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{x1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - B^2},$$

$$\text{Mit } A = 2.5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}, \quad \sqrt{A^2 - B^2} = 1.5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} :$$

$$\text{Re}\{p_{x1}\} = -1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{-1 \frac{1}{\mu\text{s}}}}, \quad \text{Im}\{p_{x1}\} = \underline{\underline{0}},$$

$$\text{Re}\{p_{x2}\} = -4 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{-4 \frac{1}{\mu\text{s}}}}, \quad \text{Im}\{p_{x2}\} = \underline{\underline{0}}.$$

Dieses Ergebnis ist nur eindeutig unter Berücksichtigung der Angabe $|p_{x2}| > |p_{x1}|$.

g) Da man nur eines der Bauelemente ändern soll, müssen L und C gleich bleiben, da sonst auch die Nullstellen verschoben würden \Rightarrow man muss den Widerstandswert R ändern \Rightarrow Antwort 1.

h) Entsprechend dem Ergebnis aus (f) ergibt sich eine doppelte Polstelle für $A = B = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$. Dazu muss der Ohmsche Widerstand von 50Ω auf 40Ω herabgesetzt werden. Der doppelte Pol liegt dann bei $-2 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$. Oder bei anderer Normierung bei $-2 (\mu\text{s})^{-1}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.3

a) Für die beiden Vierpole gelten folgende Grenzwerte:

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_{\text{TP}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p + p_x} = K/p_x, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} H_{\text{TP}}(p) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_{\text{HP}}(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} H_{\text{HP}}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K \cdot p}{p + p_x} = K.$$

Man erkennt, dass $H_{\text{TP}}(p)$ für sehr hohe Frequenzen sperrt und $H_{\text{HP}}(p)$ für sehr niedrige Frequenzen. Das bedeutet, dass beide Aussagen zutreffen.

b) Wir betrachten den Vierpol (1). Der Spannungsteiler liefert das Ergebnis

$$H_L(p) = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{p + R/L}.$$

Es handelt sich um einen Hochpass mit dem Kennparameter $K = 1$ und der Nullstelle bei

$$p_x = -\frac{R}{L} = -\frac{100 \Omega}{10^{-5} \text{ s}} = \underline{\underline{-10^{-7} \text{ 1/s}}}.$$

c) Zur Übertragungsfunktion kommt man mit der Substitution $p = j \cdot 2\pi f$:

$$H(f) = \frac{j \cdot 2\pi f}{j \cdot 2\pi f + p_0} \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^2 + p_0^2}.$$

Aus der Bedingung $|H(f_G)|^2 = 0.5$ erhält man die Bedingung:

$$(2\pi f_G)^2 = p_0^2 \Rightarrow f_G = -\frac{p_0}{2\pi} = \frac{10^{-7} \text{ 1/s}}{2\pi} \approx \underline{\underline{1.59 \text{ MHz}}}.$$

d) Für ein Gleichsignal ist eine Kapazität C ein unendlich großer Widerstand, für hohe Frequenzen wirkt C wie ein Kurzschluss \Rightarrow der Vierpol (3) beschreibt ebenfalls einen Hochpass. Dagegen zeigen die Schaltungen 2 und 4 Tiefpassverhalten.

e) Die p -Übertragungsfunktion von Vierpol (3) lautet:

$$H_L(p) = \frac{R}{1/(pC) + R} = \frac{p}{p + 1/(RC)}$$

$$\Rightarrow p_x = -1/(RC) \Rightarrow C = -\frac{1}{p_x \cdot R} = \frac{-1}{-10^{-7} \text{ 1/s} \cdot 100 \Omega} = \underline{\underline{1 \text{ nF}}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.4

a) Die p -Übertragungsfunktion lautet:

$$H_L(p) = K \cdot \frac{p - p_o}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})}$$

Zur herkömmlichen Übertragungsfunktion (Frequenzgang) kommt man mit der Substitution $p = j \cdot 2\pi f$:

$$H(f) = K \cdot \frac{j2\pi f - p_o}{(j2\pi f - p_{x1})(j2\pi f - p_{x2})} = e^{-a(f)} \cdot e^{-j \cdot b(f)}$$

Im Grenzfalle $f \rightarrow \infty$ ergibt sich für den Betrag, die Dämpfung und die Phase:

$$\lim_{f \rightarrow \infty} H(f) = \frac{K}{j2\pi f} \Rightarrow \lim_{f \rightarrow \infty} |H(f)| \equiv 0 \Rightarrow \lim_{f \rightarrow \infty} a(f) = \infty, \quad \lim_{f \rightarrow \infty} b(f) = \frac{\pi}{2} (90^\circ).$$

b) Aus der allgemeinen Gleichung in a) erhält man mit dem Grenzübergang $f \rightarrow 0$:

$$|H(f=0)| = \frac{K \cdot p_o}{p_{x1} \cdot p_{x2}} = \frac{5 \cdot 1}{(-3 + 3j) \cdot (-3 + 3j)} = \frac{5}{18} \approx 0.278,$$

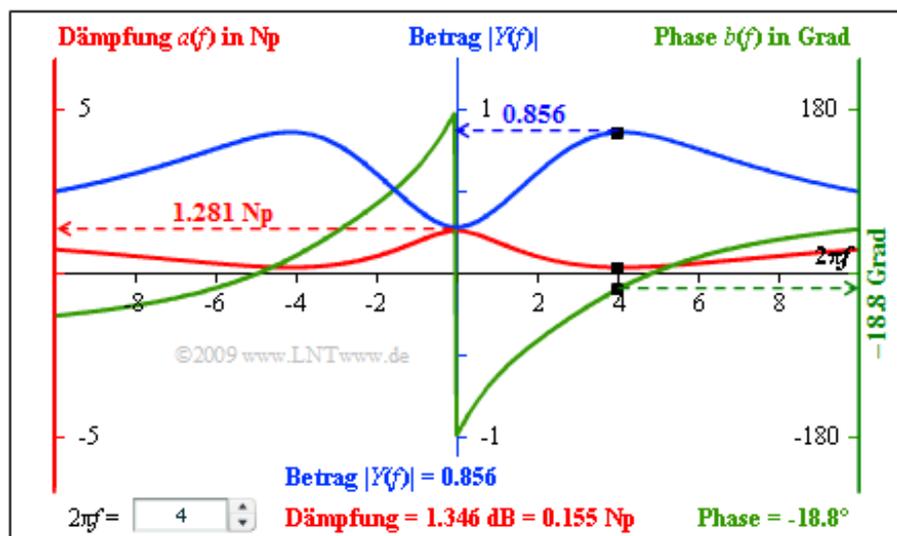
$$a(f=0) = -\ln |H(f=0)| = 1.281 \text{ Np}.$$

Die Grafik fasst die Ergebnisse dieser Aufgabe zusammen:

Mittlere Achse (blau): Betrag,
 Linke Achse (rot): Dämpfung,
 Rechte Achse (grün): Phase.

Schwarzer Punkt: $2\pi f = 4$.

Bildschirmabzug des Flash-Moduls „Kausale Systeme“.



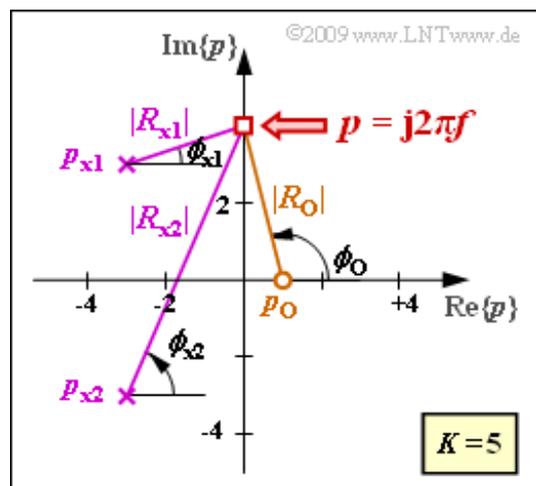
c) Entsprechend der **detaillierten Beschreibung** im Theorieteil gilt für die Dämpfungsfunktion:

$$a(f) = -\ln K + \ln |R_{x1}| + \ln |R_{x1}| - \ln |R_o|.$$

Zu berücksichtigen ist die Zusatzeinheit „Neper“ (Np).

Gesucht ist der Dämpfungswert bei $f = 2/\pi$. Dazu setzen wir $p = j \cdot 2\pi f = 4$ und ermitteln folgende Abstände:

$$\begin{aligned} R_o &= 1 - 4 \cdot j, & |R_o| &= \sqrt{1^2 + 4^2} = 4.123, \\ & & \ln |R_o| &= 1.417 \text{ Np}, \\ R_{x1} &= -3 - 1 \cdot j, & |R_{x1}| &= \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.162, \\ & & \ln |R_{x1}| &= 1.151 \text{ Np}, \\ R_{x2} &= -3 - 7 \cdot j, & |R_{x2}| &= \sqrt{3^2 + 7^2} = 7.616, \\ & & \ln |R_{x2}| &= 2.030 \text{ Np}. \end{aligned}$$



$$\Rightarrow a\left(f = \frac{4}{2\pi}\right) = -\ln 5 + 1.151 + 2.030 - 1.417 = 0.155 \text{ Np}.$$

Das entspricht $0.155 \text{ Np} \cdot 8.686 \text{ dB/Np} = \underline{1.346 \text{ dB}}$.

d) Nach der detaillierten Beschreibung im Theorieteil gilt wegen $K > 0$ für die Phasenfunktion:

$$b(f = 2/\pi) = \phi_{x1} + \phi_{x2} - \phi_o,$$

$$\phi_{x1} = \arctan(1/3) = 18.4^\circ, \quad \phi_{x2} = \arctan(7/3) = 66.8^\circ,$$

$$\phi_o = \arctan(-1/4) = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

$$\Rightarrow b(f = 2/\pi) = 18.4^\circ + 66.8^\circ - 104^\circ = \underline{-18.8^\circ}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.4

a) Durch Umformung der angegebenen p -Übertragungsfunktion ergibt sich

$$H_L(p) = \frac{1 - p/A}{1 + p/A} = -1 \cdot \frac{p - A}{p + A} \Rightarrow \underline{K = -1}, \quad \underline{p_o/A = 1}, \quad \underline{p_x/A = -1}.$$

b) Setzt man $p = j \cdot 2\pi f$, so erhält man:

$$H(f) = \frac{1 - j \cdot 2\pi f/A}{1 + j \cdot 2\pi f/A}.$$

Der Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Beträge:

$$|H(f)| = \frac{|1 - j \cdot 2\pi f/A|}{|1 + j \cdot 2\pi f/A|} = \frac{\sqrt{1 + (2\pi f/A)^2}}{\sqrt{1 + (2\pi f/A)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a(f) = -\ln |H(f)| = 0 \text{ (Np oder dB)}.$$

Richtig ist somit die Aussage 2. Auch die Aussage 3 ist richtig, wie aus der Theorieseite **Grafische Ermittlung der Dämpfung** zu ersehen ist.

c) Die Phasenfunktion $b(f)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$b(f) = -\arg H(f) = \arctan \frac{2\pi f}{A} - \arctan \frac{-2\pi f}{A} = 2 \cdot \arctan \frac{2\pi f}{A} :$$

$$b(f = \frac{A}{2\pi}) = 2 \cdot \arctan(1) = 2 \cdot 45^\circ = \underline{90^\circ},$$

$$b(f = \frac{A}{\pi}) = 2 \cdot \arctan(2) = 2 \cdot 63.4^\circ = \underline{126.8^\circ},$$

$$b(f \rightarrow \infty) = 2 \cdot \arctan(\infty) = 2 \cdot 90^\circ = \underline{180^\circ}.$$

Zu den gleichen Ergebnissen kommt man nach der Vorgehensweise entsprechend der Seite **Grafische Ermittlung der Phase** im Theorieteil.

d) Die angegebene p -Übertragungsfunktion lässt sich wie folgt darstellen:

$$H_L(p) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + 2 \cdot \sqrt{Z_1 \cdot Z_2} + Z_2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_1})(\sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_1})}{(\sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_1})^2} = \frac{\sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_1}}{\sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_1}}.$$

Mit $Z_1 = p \cdot L$ und $Z_2 = 1/(pC)$ erhält man weiter:

$$H_L(p) = \frac{\sqrt{1/(pC)} - \sqrt{pL}}{\sqrt{1/(pC)} + \sqrt{pL}} = \frac{1 - p \cdot \sqrt{LC}}{1 + p \cdot \sqrt{LC}} = -1 \cdot \frac{p - \sqrt{1/(LC)}}{p + \sqrt{1/(LC)}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{1/(LC)} : H_L(p) = -1 \cdot \frac{p - A}{p + A}.$$

Es ergibt sich die genau gleiche Übertragungsfunktion, wie in der Teilaufgabe a) berechnet. Daraus folgt, dass nur die Aussage 1 richtig ist:

- Der Dämpfungsverlauf ist $a(f) = 0$ (Np). Keine Frequenz wird gedämpft oder verstärkt. Man

spricht deshalb auch von einem „Allpass“.

- Die zweite Aussage ist falsch. Der Phasenverlauf $b(f)$ ist nicht linear, sondern vielmehr wie in der Teilaufgabe c) berechnet.
- Die Hilbert–Transformierte der Konstanten $a(f) = 0$ müsste zur Phasenfunktion $b(f) = 0$ führen, wie in **Kapitel 3.1** gezeigt. Das heißt, dass die Aussage 3 falsch ist.
- Nur bei minimalphasigen Systemen hängen die Dämpfungsfunktion $a(f)$ und Phasenfunktion $b(f)$ über die Hilbert–Transformation zusammen.
- Bei einem solchen Minimum–Phasen–System liegen aber alle Pole und Nullstellen in der linken p –Halbebene, was hier nicht zutrifft \Rightarrow ein Allpass ist kein Minimum–Phasen–System.

e) Beide Aussagen sind richtig. Wie bereits in der Teilaufgabe b) festgestellt wurde, ergibt sich dann eine konstante Dämpfung, wenn es zu jedem Pol in der linken p –Halbebene eine entsprechende Nullstelle in der rechten Halbebene gibt \Rightarrow die Schaltung **B** zeigt ebenfalls Allpass–Charakteristik.

Da $b(f)$ stets eine unsymmetrische Funktion ist, gilt $b(f = 0) = 0$ ganz allgemein, das heißt für jede Spektralfunktion $H(f)$, deren Fourier–Rücktransformierte reell ist.

Musterlösung zur Aufgabe A3.5

a) Bei extrem tiefen Frequenzen ($f \rightarrow 0$) hat die Kapazität C einen unendlich großen Widerstand und bei sehr hohen Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) die Induktivität L . In beiden Fällen gilt $Y(f) = X(f) \Rightarrow H(f) = 1$. Bei der Resonanzfrequenz f_0 wirkt dagegen die LC -Serienschaltung als Kurzschluss und es gilt $H(f_0) = 0$. Daraus folgt allein aus dem Blockschaltbild: Es handelt sich um eine Bandsperre.

b) Aus dem Pol-Nullstellen-Diagramm ergibt sich die folgende p -Übertragungsfunktion (ohne den Normierungsfaktor $1/T$):

$$H_L(p) = \frac{(p - j \cdot 2)(p + j \cdot 2)}{(p + 1)(p + 4)} = \frac{p^2 + 4}{p^2 + 5 \cdot p + 4}$$

Unter Berücksichtigung der Spannungsteilereigenschaften erhält man mit dem Blindwiderstand pL der Induktivität und dem Blindwiderstand $1/(pC)$ der Kapazität für die obere Schaltung:

$$H_L(p) = \frac{p \cdot L + 1/(pC)}{R + p \cdot L + 1/(pC)} = \frac{p^2 + 1/(pC)}{p^2 + p \cdot R/L + 1/(pC)}$$

Durch Vergleich erkennt man unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors $1/T = 10^6$ 1/s:

$$\frac{R}{L} = 5 \cdot 10^6 \text{ 1/s} \Rightarrow L = \frac{100 \text{ } \Omega}{5 \cdot 10^6 \text{ 1/s}} = 20 \text{ } \mu\text{H},$$

$$\frac{1}{LC} = 4 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}^2 \Rightarrow C = \frac{1}{4 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ } \Omega \cdot \text{s}} = 12.5 \text{ nF}.$$

c) Die Sprungfunktion am Eingang wird durch $X_L(p) = 1/p$ berücksichtigt. Damit ergibt sich

$$Y_L(p) = \frac{p^2 + 4}{p \cdot (p + 1) \cdot (p + 4)},$$

woraus man durch Anwendung des Residuensatzes die Zeitfunktion $y(t)$ ermitteln kann:

$$y_1(t) = \frac{p^2 + 4}{(p + 1) \cdot (p + 4)} \cdot e^{pt} \Big|_{p=0} = 1,$$

$$y_2(t) = \frac{p^2 + 4}{p \cdot (p + 4)} \cdot e^{pt} \Big|_{p=-1} = -\frac{5}{3} \cdot e^{-t},$$

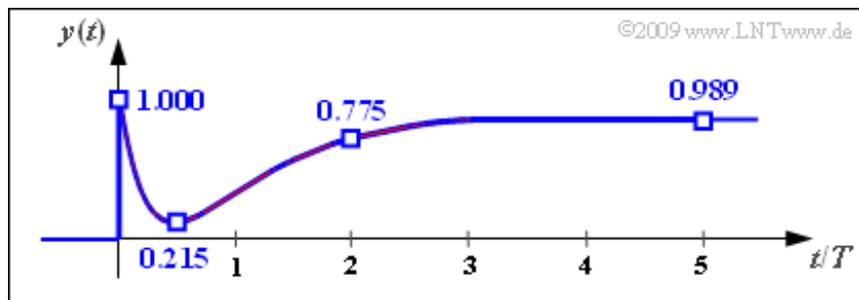
$$y_3(t) = \frac{p^2 + 4}{p \cdot (p + 1)} \cdot e^{pt} \Big|_{p=-4} = \frac{5}{3} \cdot e^{-4t}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 1 - \frac{5}{3} \cdot e^{-t/T} + \frac{5}{3} \cdot e^{-4t/T}.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass die bei dieser Rechnung nicht berücksichtigte Konstante $10^6 \cdot 1/s$ durch die Zeitnormierung auf $T = 1 \text{ } \mu\text{s}$ ausgeglichen werden kann. Die gesuchten Signalwerte lauten:

$$y(t = 0) \equiv 1.000, \quad y(t = 0.5 \text{ } \mu\text{s}) \equiv 0.215, \quad y(t = 2 \text{ } \mu\text{s}) \equiv 0.775, \quad y(t = 5 \text{ } \mu\text{s}) \equiv 0.989.$$

Die folgende Grafik zeigt den Signalverlauf. Die gesuchten Zahlenwerte sind nochmals eingetragen.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Da extrem hohe Frequenzen durch das System (Bandsperr) nicht beeinflusst werden, ist auch im Ausgangssignal $y(t)$ der Sprung von 0 auf 1 mit unendlich großer Flankensteilheit zu erkennen.
- Wegen $H(f=0) = 1$ ergibt der Grenzwert von $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ folgerichtig ebenfalls den Wert 1.
- Aufgrund der LC -Resonanzfrequenz bei $f_0 = 1/\pi$ (in MHz) kommt es zu einem Einbruch im Signalverlauf. Das Signalminimum von ca. 0.215 liegt bei etwa $0.5 \mu\text{s}$.

d) Die Impulsantwort $h(t)$ ergibt sich aus der Sprungantwort $y(t)$ durch Differentiation:

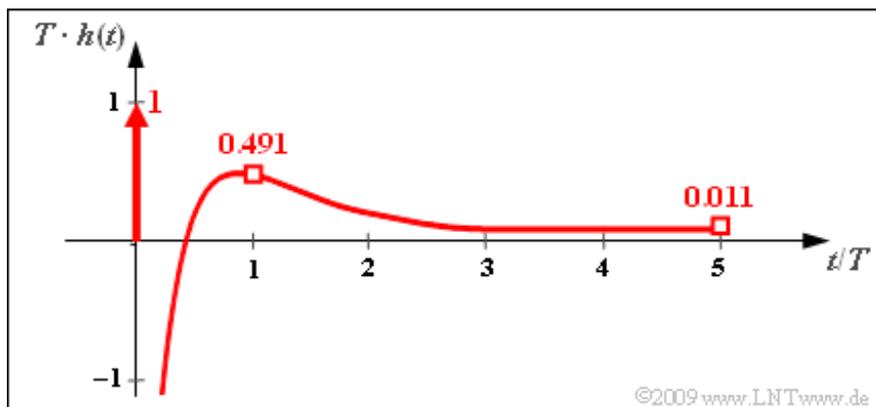
$$h(t) = \frac{d y(t)}{dt} = \delta(t) + \frac{5}{3T} \cdot e^{-t/T} - \frac{20}{3T} \cdot e^{-4t/T}.$$

Der Lösungsvorschlag 1 ist somit richtig, da die Differentiation einer Sprungfunktion die Diracfunktion liefert. Für den kontinuierlichen Anteil von $h(t)$ erhält man folgende Zahlenwerte:

$$T \cdot h(t=0) = \frac{5}{3} - \frac{20}{3} = -5,$$

$$T \cdot h(t=T) = \frac{5}{3} \cdot e^{-1} - \frac{20}{3} \cdot e^{-4} = \frac{5}{3} \cdot 0.368 - \frac{20}{3} \cdot 0.018 \approx 0.491.$$

Da $h(t)$ im Grenzfalle für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, ist der dritte Lösungsvorschlag richtig im Gegensatz zum zweiten. Der Verlauf von $h(t)$ ist in der unteren Grafik dargestellt.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.5

a) Voraussetzung für die Anwendung des Residuensatzes ist, dass es weniger Nullstellen als Pole gibt, das heißt, es muss $Z < N$ gelten. Diese Voraussetzung ist bei den Konfigurationen B, D und F nicht gegeben. Hier muss zunächst eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden, zum Beispiel für die Konfiguration B mit $p_x = -1$:

$$Y_L(p) = \frac{p}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

b) Mit $Y_L(p) = 2/(p+1)$ ergibt sich aus dem Residuensatz ($I = 1$):

$$y(t) = 2 \cdot e^{pt} \Big|_{p=-1} = 2 \cdot e^{-t} \Rightarrow y(t=1) = \frac{2}{e} \approx \underline{\underline{0.736}} \text{ (rein reell).}$$

c) Bei gleicher Vorgehensweise wie in der Teilaufgabe b) erhält man nun:

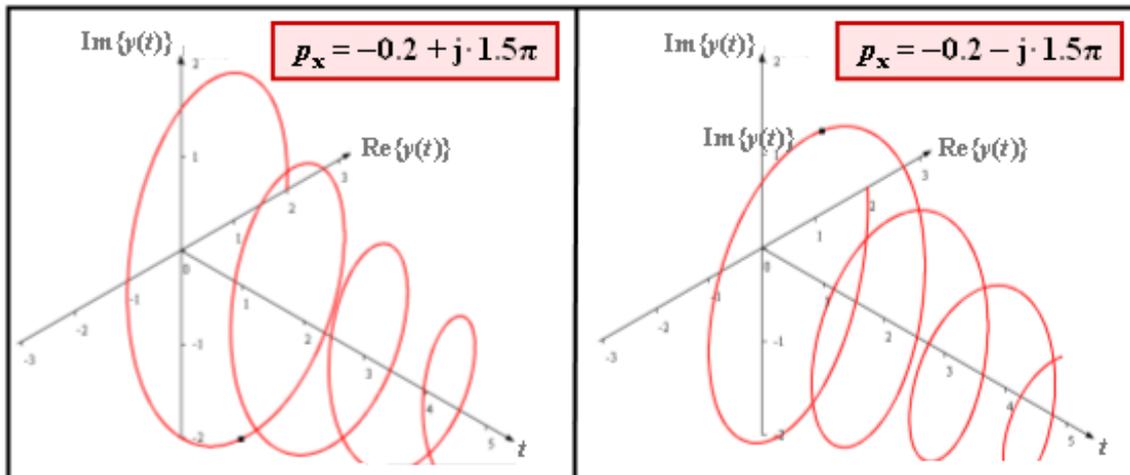
$$y(t) = 2 \cdot e^{-(0.2 + j \cdot 1.5\pi) \cdot t} = 2 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 1.5\pi \cdot t}.$$

Aufgrund des zweiten Terms handelt es sich um ein komplexes Signal, dessen Phase in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) dreht. Für $t = 1$ gilt:

$$y(t=1) = 2 \cdot e^{-0.2} \cdot [\cos(1.5\pi) + j \cdot \sin(1.5\pi)] = -j \cdot 1.638$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{y(t=1)\} = \underline{\underline{0}}, \quad \text{Im}\{y(t=1)\} = \underline{\underline{-1.638}}.$$

Die linke Grafik zeigt das komplexe Signal für einen Pol bei $p_x = -0.2 + j \cdot 1.5\pi$. Rechts daneben sieht man das dazu konjugiert-komplexe Signal, wenn der Pol bei $p_x = -0.2 - j \cdot 1.5\pi$ liegt.



©2009 www.LNTwww.de

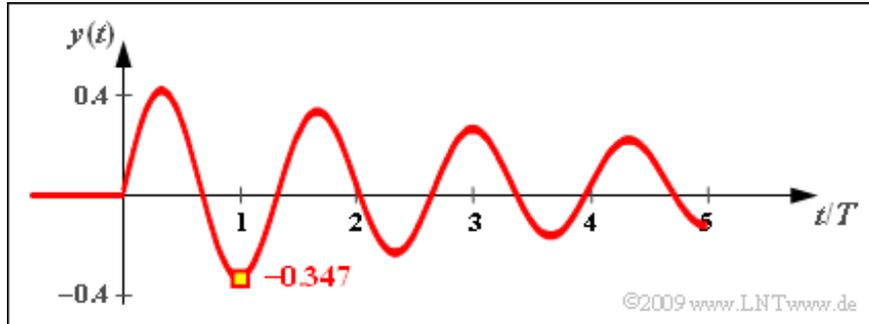
d) Nun gilt $I = 2$. Die Residuen von p_{x1} bzw. p_{x2} liefern:

$$y_1(t) = \frac{K \cdot (p - p_{x2})}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})} \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{x1}} = \frac{K}{p_{x1} - p_{x2}} \cdot e^{p_{x1} t},$$

$$y_2(t) = \frac{K}{p_{x2} - p_{x1}} \cdot e^{p_{x2} t} = -\frac{K}{p_{x1} - p_{x2}} \cdot e^{-p_{x1} t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \frac{2 \cdot e^{-0.2 \cdot t}}{j \cdot 3\pi} \cdot [\cos(\cdot) + j \cdot \sin(\cdot) - \cos(\cdot) + j \cdot \sin(\cdot)] = \\ &= \frac{4}{3\pi} \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \sin(1.5\pi \cdot t) \Rightarrow y(t=1) = -\frac{4}{3\pi} \cdot e^{-0.2 \cdot t} = \underline{\underline{-0.347}}. \end{aligned}$$

Die Grafik zeigt den (rein reellen) Signalverlauf $y(t)$ für die Konfiguration E.



Musterlösung zur Aufgabe A3.6

a) Ersetzt man in der Übertragungsfunktion $H_L(p)$ den Parameter T durch $1/f_0$ sowie p durch $j \cdot 2\pi f$, so erhält man für den Frequenzgang allgemein bzw. für $f_0 = 1 \text{ MHz}$:

$$H(f) = \frac{2/T}{j \cdot 2\pi f + 2/T} = \frac{f_0}{j \cdot \pi f + f_0} \Rightarrow H(f = f_0) = \frac{1}{1 + j \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow |H(f = f_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}} \approx 0.303, \quad a(f = f_0) = -\ln |H(f = f_0)| \approx 1.194 \text{ Np}$$

$$\Rightarrow \arg H(f = f_0) = -\arctan(\pi) \approx -72^\circ, \quad b(f = f_0) = -\arg H(f = f_0) \approx +72^\circ.$$

b) Das Signal $y_C(t)$ ist gegenüber $c(t)$ um den Faktor 0.303 gedämpft und um $\tau \approx 72/360 \cdot T = T/5$ verzögert. Man kann dieses Signal somit auch folgendermaßen beschreiben:

$$y_C(t) = \frac{\cos(2\pi t/T) + \pi \cdot \sin(2\pi t/T)}{1 + \pi^2} = 0.303 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t - T/5}{T}\right).$$

$$\Rightarrow y_C(t = 0) = \frac{1}{1 + \pi^2} \approx 0.092.$$

Dieses Signal ist in der linken Grafik zur Musterlösung e) blau-gepunktet dargestellt.

c) Das Signal $y_S(t)$ ist gegenüber $s(t)$ ebenfalls um den Dämpfungsfaktor 0.303 kleiner und um die Zeitdauer $\tau \approx T/5$ verzögert. Es lässt sich wie folgt beschreiben:

$$y_S(t) = \frac{-\pi \cdot \cos(2\pi t/T) + \sin(2\pi t/T)}{1 + \pi^2} = 0.303 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t - T/5}{T}\right)$$

$$\Rightarrow y_S(t = 0) = -\frac{\pi}{1 + \pi^2} \approx -0.289.$$

Dieses Signal ist in der rechten Grafik zur Musterlösung e) blau-gepunktet dargestellt.

d) Bei T_h soll die Impulsantwort $h(t)$ auf 1% des Maximalwertes abgeklungen sein. Somit gilt:

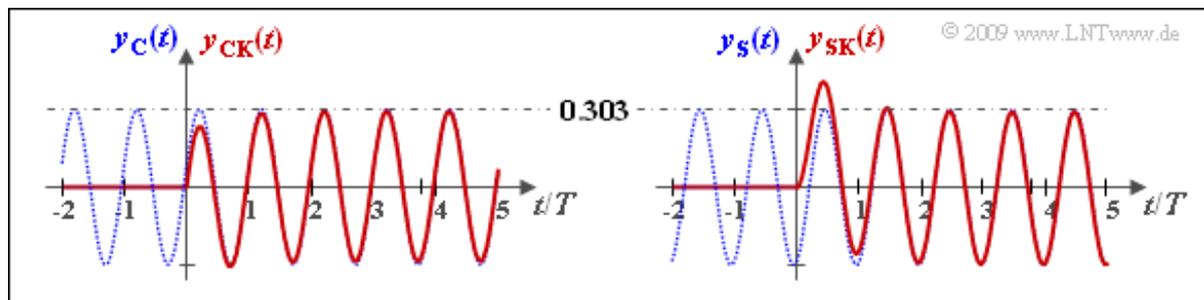
$$e^{-2T_h/T} = 0.01 \Rightarrow \frac{T_h}{T} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{0.01} \approx 2.3$$

$$\Rightarrow h(t = 0) = 2/T, \quad h(t = T_h) = 0.02/T.$$

e) Richtig sind die Aussagen 1 und 2. Die kausalen Signale $y_{CK}(t)$ und $y_{SK}(t)$ müssen für $t < 0$ gleich 0 sein. Da aber die Impulsantwort $h(t)$ des betrachteten Filters für $t > T_h$ (nahezu) verschwindet, ist es nach Abschluss des Einschwingvorganges egal, ob das zeitlich unbegrenzte Cosinussignal $c(t)$ oder das kausale Signal $c_K(t)$ am Eingang anliegt. Das gleiche gilt für die Sinussignale:

$$t > T_h: \quad y_{CK}(t) = y_C(t), \quad y_{SK}(t) = y_S(t).$$

Die Grafik zeigt links die Ausgangssignale $y_C(t)$ und $y_{CK}(t)$ bei cosinusförmigem Eingang und rechts die Signale $y_S(t)$ und $y_{SK}(t)$ bei sinusförmigem Eingang. Beachten Sie die Laufzeit von $T/5$ (entsprechend der Phase 72°) in beiden Fällen. Bei $y_{CK}(t)$ sind die ersten Wellenberge kleiner als 1, bei $y_{SK}(t)$ größer, um die richtige Phasenlage von $y_C(t)$ bzw. $y_S(t)$ zu erreichen.



f) Mit den Abkürzungen

$$p_{x1} = j \cdot 2\pi/T, \quad p_{x2} = -j \cdot 2\pi/T, \quad p_{x3} = -2/T.$$

kann für die Laplace-Transformierte des Signals $y_{CK}(t)$ geschrieben werden:

$$Y_L(p) = \frac{-p_{x3} \cdot p}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})(p - p_{x3})}.$$

Die Zeitfunktion $y_{CK}(t)$ setzt sich somit nach dem Residuensatz aus drei Anteilen zusammen:

- Der erste Anteil ergibt sich unter Berücksichtigung von $p_{x2} = -p_{x1}$ zu

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \text{Res} \left| \{Y_L(p) \cdot e^{pt}\} \right|_{p=p_{x1}} = \frac{-p_{x3} \cdot p}{(p - p_{x2})(p - p_{x3})} \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{x1}} = \\ &= \frac{-p_{x3} \cdot p_{x1}}{(p_{x1} - p_{x2})(p_{x1} - p_{x3})} \cdot e^{p_{x1} \cdot t} = \frac{-p_{x3}/2}{p_{x1} - p_{x3}} \cdot e^{p_{x1} \cdot t}. \end{aligned}$$

- In gleicher Weise erhält man für den zweiten Anteil:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \text{Res} \left| \{Y_L(p) \cdot e^{pt}\} \right|_{p=p_{x2}} = \frac{-p_{x3} \cdot p}{(p - p_{x1})(p - p_{x3})} \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{x2}} = \\ &= \frac{-p_{x3} \cdot p_{x2}}{(p_{x2} - p_{x1})(p_{x2} - p_{x3})} \cdot e^{p_{x2} \cdot t} = \frac{p_{x3}/2}{p_{x1} + p_{x3}} \cdot e^{-p_{x1} \cdot t}. \end{aligned}$$

- Fasst man beide Anteile zusammen und berücksichtigt die Werte von p_{x1} und p_{x3} , so erhält man

$$\begin{aligned} y_{1+2}(t) &= \frac{1/T}{2/T + j \cdot 2\pi/T} \cdot e^{j \cdot 2\pi t/T} + \frac{1/T}{2/T - j \cdot 2\pi/T} \cdot e^{-j \cdot 2\pi t/T} = \\ &= \frac{1/2}{1 + j \cdot \pi} \cdot e^{j \cdot 2\pi t/T} + \frac{1/2}{1 - j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot 2\pi t/T} = \\ &= \frac{1/2 \cdot (1 - j \cdot \pi)}{1 + \pi^2} \cdot e^{j \cdot 2\pi t/T} + \frac{1/2 \cdot (1 + j \cdot \pi)}{1 + \pi^2} \cdot e^{-j \cdot 2\pi t/T}. \end{aligned}$$

- Mit Hilfe des Eulerschen Satzes kann hierfür auch geschrieben werden:

$$y_{1+2}(t) = \frac{\cos(2\pi t/T) + \pi \cdot \sin(2\pi t/T)}{1 + \pi^2} = y_C(t).$$

Man erkennt, dass $y_{1+2}(t)$ gleich dem unter b) berechneten Signal $y_C(t)$ ist.

- Schließlich erhält man für das letzte Residuum:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{-p_{x3}^2}{(p_{x3} - p_{x1})(p_{x3} - p_{x2})} \cdot e^{p_{x3} \cdot t} = \frac{-(2/T)^2 \cdot e^{-2t/T}}{(-2/T - j \cdot 2\pi/T)(-2/T + j \cdot 2\pi/T)} \\ &= \frac{-1}{(1 + j \cdot \pi)(1 - j \cdot \pi)} \cdot e^{-2t/T} = \frac{-1}{1 + \pi^2} \cdot e^{-2t/T}. \end{aligned}$$

- Damit lautet das Ausgangssignal bei kausalem Cosinussignal am Eingang:

$$y_{\text{CK}}(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \frac{\cos(2\pi t/T) + \pi \cdot \sin(2\pi t/T) - e^{-2t/T}}{1 + \pi^2}$$

$$\Rightarrow y_{\text{CK}}(t = T/5) = \frac{\cos(72^\circ) + \pi \cdot \sin(72^\circ) - e^{-0.4}}{1 + \pi^2} \approx \underline{0.24} < 0.303.$$

Zum Vergleich: Das Signal $y_{\text{C}}(t)$ hat zu diesem Zeitpunkt den Wert 0.303.

- Dagegen ergibt sich beim kausalen Sinussignal am Eingang allgemein und speziell zum Zeitpunkt des ersten Maximums bei $t = 0.45T$:

$$y_{\text{SK}}(t) = \frac{-\pi \cdot \cos(2\pi t/T) + \sin(2\pi t/T) + \pi \cdot e^{-2t/T}}{1 + \pi^2}$$

$$\Rightarrow y_{\text{SK}}(t = 0.45 \cdot T) = \frac{-\pi \cdot \cos(162^\circ) + \sin(162^\circ) + \pi \cdot e^{-0.9}}{1 + \pi^2} \approx 0.42 > 0.303.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.6

a) Durch Anwendung des Residuensatzes erhält man für das Signal $x(t)$ bei positiven Zeiten:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \operatorname{Res} \left| \{X_L(p) \cdot e^{pt}\} = \frac{p}{p + j \cdot 2\pi} \cdot e^{pt} \right|_{p=j \cdot 2\pi} = \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot 2\pi t}, \\x_2(t) &= \operatorname{Res} \left| \{X_L(p) \cdot e^{pt}\} = \frac{p}{p - j \cdot 2\pi} \cdot e^{pt} \right|_{p=-j \cdot 2\pi} = \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot 2\pi t}, \\ \Rightarrow x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j \cdot 2\pi t} + e^{-j \cdot 2\pi t}] = \cos(2\pi t).\end{aligned}$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

b) Prinzipiell könnte diese Teilaufgabe in gleicher Weise gelöst werden wie die Teilaufgabe a). Man kann aber auch den **Integrationsatz** heranziehen. Dieser besagt unter anderem, dass die Multiplikation mit $1/p$ im Spektralbereich der Integration im Zeitbereich entspricht:

$$Y_L(p) = \frac{1}{p} \cdot X_L(p) \quad \Rightarrow \quad t \geq 0 : \quad y(t) = \int_{-\infty}^t \cos(2\pi\tau) \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi t).$$

Richtig sind dementsprechend die Lösungsalternativen 2 und 4.

Hinweis: Das kausale Cosinussignal $x(t)$ sowie das hier berechnete kausale Sinussignal $y(t)$ sind auf dem Angabenblatt zu **Aufgabe A3.6** als $c_K(t)$ bzw. $s_K(t)$ dargestellt.

c) Ein Vergleich mit der Berechnung von $x(t)$ zeigt, dass $z(t) = \cos(\beta \cdot t)$ für $t \geq 0$ und $z(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Der Grenzübergang für $\beta \rightarrow 0$ führt damit zur Sprungfunktion $\gamma(t) \Rightarrow$ Lösungsvorschläge 1 und 3. Zum gleichen Ergebnis kommt man durch die Betrachtung im Spektralbereich:

$$Z_L(p) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{p}{p^2 + \beta^2} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \gamma(t).$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.7

a) Ausgehend von der vorgegebenen Gleichung kann $H_L(p)$ wie folgt umgeformt werden:

$$H_L(p) = \frac{4}{1/p^2 + 4/p + 4} = \frac{p^2}{p^2 + p + 1/4} = \frac{p^2}{(p + 1/2)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z = 2, N = 2, K = 1.}$$

b) Die Gesamtübertragungsfunktion lautet entsprechend der Angabe:

$$H_L(p) = H_L^{(1)}(p) \cdot H_L^{(2)}(p) = \frac{p^2}{(p + A)^2}.$$

Ein Vergleich mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) zeigt, dass $A = \underline{0.5}$ sein muss.

c) Ausgehend von der unter a) berechneten Gleichung erhält man

$$H_L(p) = \frac{p^2}{p^2 + p + 0.25} = \frac{p^2 + p + 0.25}{p^2 + p + 0.25} - \frac{p + 0.25}{p^2 + p + 0.25}$$

$$\Rightarrow H_L'(p) = \frac{p + 0.25}{p^2 + p + 0.25} = \frac{p + 0.25}{(p + 0.5)^2}.$$

Richtig ist dementsprechend der letzte Lösungsvorschlag.

d) Bezüglich der Funktion $H_L'(p)$ gilt $Z' = 1, N' = 2$ und $K' = 1$. Die beiden Pole bei $p_x = -0.5$ fallen zusammen, so dass nur ein Residuum ermittelt werden muss:

$$h'(t) = \text{Res} \left|_{p=p_x} \{ H_L'(p) \cdot e^{pt} \} = \frac{d}{dp} \left\{ \frac{p + 0.25}{(p + 0.5)^2} \cdot (p + 0.5)^2 \cdot e^{pt} \right\} \Big|_{p=-0.5} =$$

$$= \frac{d}{dp} \{ (p + 0.25) \cdot e^{pt} \} \Big|_{p=-0.5}.$$

Mit der Produktregel der Differentialrechnung erhält man:

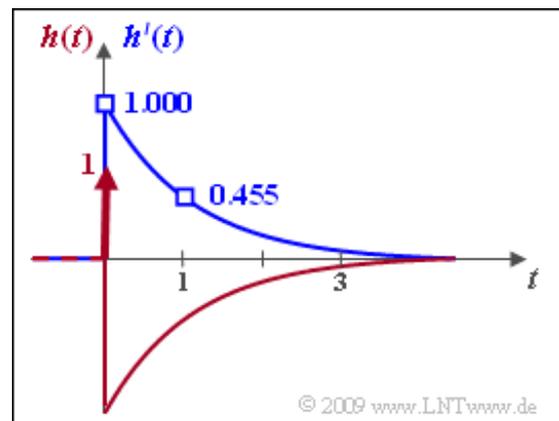
$$h'(t) = e^{pt} + (p + 0.25) \cdot t \cdot e^{pt} \Big|_{p=-0.5} =$$

$$= (1 - t/4) \cdot e^{-t/2}$$

$$\Rightarrow h'(t=0) = \underline{1},$$

$$h'(t=1) = \underline{0.455}$$

$$h'(t \rightarrow \infty) = \underline{0}.$$



Die Grafik zeigt als blaue Kurve $h'(t)$ und als rote Kurve die gesamte Impulsantwort

$$h(t) = \delta(t) - (1 - t/4) \cdot e^{-t/2}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.7

a) Nach den in der Aufgabe Z3.4 angegebenen **Kriterien** liegt dann ein Allpass vor, wenn es zu jeder Polstelle $p_x = -A + j \cdot B$ in der linken p -Halbebene eine entsprechende Nullstelle $p_o = A + j \cdot B$ in der rechten Halbebene gibt. Mit $K = 1$ ist dann die Dämpfungsfunktion $a(f) = 0 \text{ Np} \Rightarrow |H(f)| = 1$. Aus der Grafik auf der Angabenseite erkennt man, dass die beiden Konfigurationen (1) und (2) genau diese Symmetrieeigenschaften aufweisen.

b) Die Übertragungsfunktion $H_L^{(5)}(p)$ wird ebenso durch die Konfiguration (4) beschrieben, wie die nachfolgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} H_L^{(5)}(p) &= \frac{p/A}{(\sqrt{p/A} + \sqrt{A/p})^2} = \frac{p/A}{p/A + 2 + A/p} = \\ &= \frac{p^2}{p^2 + 2A \cdot p + A^2} = \frac{p^2}{(p + A)^2} = H_L^{(4)}(p). \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen liegen bei $p_o = 0$, der doppelte Pol bei $p_x = -A = -2$.

c) Für die Konfiguration (1) gilt:

$$\begin{aligned} H_L(p) &= \frac{p - 2}{p + 2} = \frac{p + 2 - 4}{p + 2} = 1 - \frac{4}{p + 2} = 1 - H_L'(p) \\ \Rightarrow H_L'(p) &= \frac{4}{p + 2} \Rightarrow \underline{H_L'(p = 0) = 2}. \end{aligned}$$

d) In gleicher Weise ergibt sich für die Konfiguration (2):

$$\begin{aligned} H_L(p) &= \frac{(p - 2 - j \cdot 2)(p - 2 + j \cdot 2)}{(p + 2 - j \cdot 2)(p + 2 + j \cdot 2)} = \frac{p^2 - 4 \cdot p + 8}{p^2 + 4 \cdot p + 8} = \\ &= \frac{p^2 + 4 \cdot p + 8 - 8 \cdot p}{p^2 - 4 \cdot p + 8} = 1 - \frac{8 \cdot p}{p^2 - 4 \cdot p + 8} = 1 - H_L'(p) \\ \Rightarrow H_L'(p) &= 8 \cdot \frac{p}{(p + 2 - j \cdot 2)(p + 2 + j \cdot 2)}. \end{aligned}$$

Richtig sind die beiden letzten Lösungsvorschläge im Gegensatz zur Aussage 1. Während $H_L(p)$ zwei konjugiert-komplexe Nullstellen aufweist, besitzt $H_L'(p)$ nur eine einzige Nullstelle bei $p = 0$.

e) Für die Konfiguration (3) gilt:

$$\begin{aligned} H_L(p) &= \frac{p^2}{p^2 + 4 \cdot p + 8} = \frac{p^2 + 4 \cdot p + 8 - 4 \cdot p - 8}{p^2 + 4 \cdot p + 8} = 1 - H_L'(p) \\ \Rightarrow H_L'(p) &= 4 \cdot \frac{p + 2}{(p + 2 - j \cdot 2)(p + 2 + j \cdot 2)}. \end{aligned}$$

Die Nullstelle von $H_L'(p)$ liegt nun bei $p = -2$, die Konstante ist $K' = 4 \Rightarrow$ richtig ist hier nur Aussage 2.

f) Schließlich gilt für die Konfiguration (4):

$$H_L(p) = \frac{p^2}{(p+2)^2} = \frac{p^2 + 4 \cdot p + 4 - 4 \cdot p - 4}{p^2 + 4 \cdot p + 4} = 1 - \frac{4 \cdot p + 4}{p^2 + 4 \cdot p + 4}$$
$$\Rightarrow H_L'(p) = 4 \cdot \frac{p+1}{(p+2)^2}.$$

Richtig ist auch hier der Lösungsvorschlag 2. Allgemein lässt sich sagen: Durch die Partialbruchzerlegung wird die Anzahl und die Lage der Nullstellen verändert. Die Pole von $H_L'(p)$ sind dagegen stets identisch mit denen von $H_L(p)$.