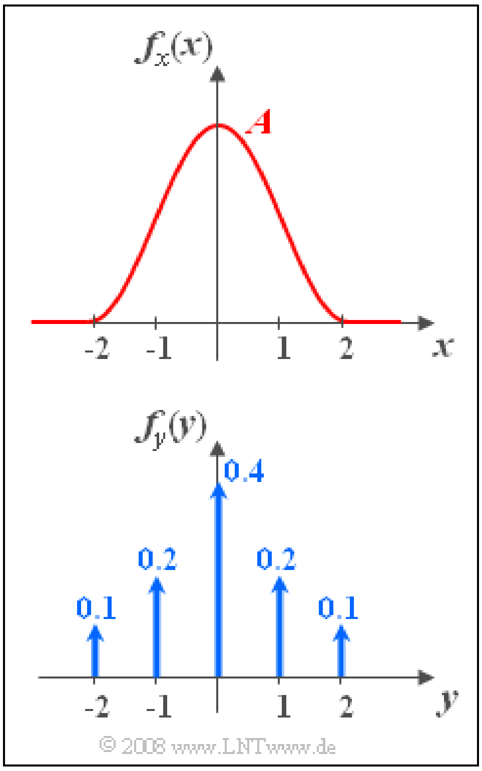
A3.1: cos² - und Dirac-WDF



Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDF) zweier Zufallsgrößen x und y.

Die WDF der Zufallsgröße x lautet in analytischer Form:

$$f_x(x) = \begin{cases} A \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4} \cdot x) & \text{für } -2 \le x \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dagegen besteht die WDF der Zufallsgröße y aus insgesamt fünf Diracfunktionen mit den im Bild unten angegebenen Gewichten.

Betrachtet man diese Zufallsgrößen als Momentanwerte zweier Zufallssignale $x(t)$ und $y(t)$, so ist offensichtlich, dass beide Signale auf den Bereich ±2 „amplitudenbegrenzt" sind. Betragsmäßig größere Werte kommen nicht vor.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 2.1** und **Kapitel 3.1.** Es gilt folgende Gleichung:

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax).$$

Eine Zusammenfassung der hier behandelten Thematik bietet das folgende Lernvideo:
Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (2-tlg: Dauer 5:30 – 6:35)

Fragebogen zu "A3.1: cos² - und Dirac-WDF"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen uneingeschränkt zu?

- ☐ Die Zufallsgröße x ist wertkontinuierlich.
- ☐ Die Zufallsgröße y ist wertdiskret.
- ☐ Die Zufallsgröße y ist gleichzeitig zeitdiskret.
- ☐ Die WDF sagt nichts aus bzgl. „zeitdiskret/zeitkontinuierlich”.

b) Berechnen Sie den Parameter A der WDF $f_x(x)$.

$\boldsymbol{A}$ =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x exakt gleich 0 ist?

Pr(x = 0) =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x größer als 0 ist?

Pr(x > 0) =

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass y größer als 0 ist?

Pr(y > 0) =

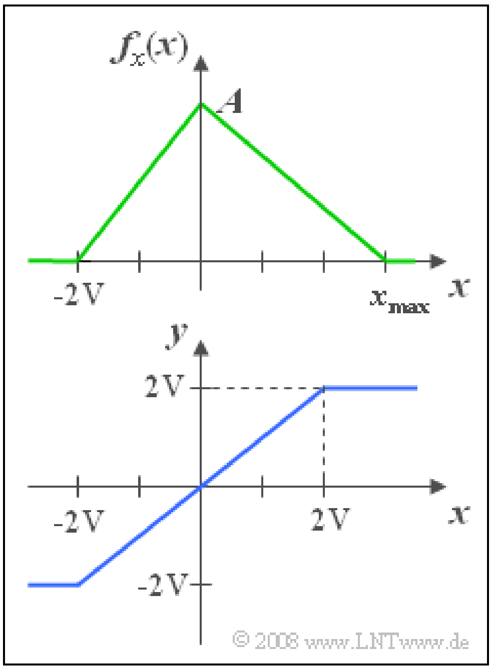
f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass y betragsmäßig kleiner als 1 ist?

Pr(|y| < 1) =

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x betragsmäßig kleiner als 1 ist?

Pr(|x| < 1) =

Z3.1: Dreieckförmige WDF



Wir betrachten eine kontinuierliche Zufallsgröße x mit der oben skizzierten WDF. Der Minimalwert des Signals ist x_{min} = –2V.

Dagegen ist der maximale Wert x_{max} ein freier Parameter, der Werte zwischen 2V und 4V annehmen kann.

Die Zufallsgröße x soll hier als der Momentanwert eines Zufallssignals aufgefasst werden. Gibt man dieses Signal x(t) auf einen Amplitudenbegrenzer mit der Kennlinie (siehe untere Skizze)

$$y(t) = \begin{cases} -2\text{V} & \text{falls } x(t) < -2\text{V}, \\ x(t) & \text{falls } -2\text{V} \le x(t) \le +2\text{V}, \\ +2\text{V} & \text{falls } x(t) > +2\text{V}, \end{cases}$$

so entsteht das Signal $y(t)$ bzw. die neue Zufallsgröße y, die in den beiden letzten Teilfragen e) und f) betrachtet wird.

Für die Teilaufgaben a) und b) gelte x_{max} = 2V; für alle weiteren Teilaufgaben ist x_{max} = 4V zu setzen.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Inhalt von **Kapitel 3.1.**

Eine Zusammenfassung der hier behandelten Thematik bietet das folgende Lernvideo:

Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (2-tlg: Dauer 5:30 – 6:35)

Fragebogen zu "Z3.1: Dreieckförmige WDF"

a) Es sei $x_{max} = 2V$. Berechnen Sie den Parameter $A = f_x(0)$.

$\boldsymbol{x_{max} = 2V}$**:** $\boldsymbol{A}$ = 1/V

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $|x(t)|$ kleiner als $x_{max}/2$?

$\boldsymbol{x_{max} = 2V}$**:** $\mathbf{Pr}(|\boldsymbol{x}| < \mathbf{1V})$ =

c) Nun gelte $x_{max} = 4V$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen 1V und 3V liegt?

$\boldsymbol{x_{max} = 4V}$**:** $\mathbf{Pr}(\mathbf{1V} < \boldsymbol{x} < \mathbf{3V})$ =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x genau gleich 2V ist?

$\boldsymbol{x_{max} = 4V}$**:** $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{x} = \mathbf{2V})$ =

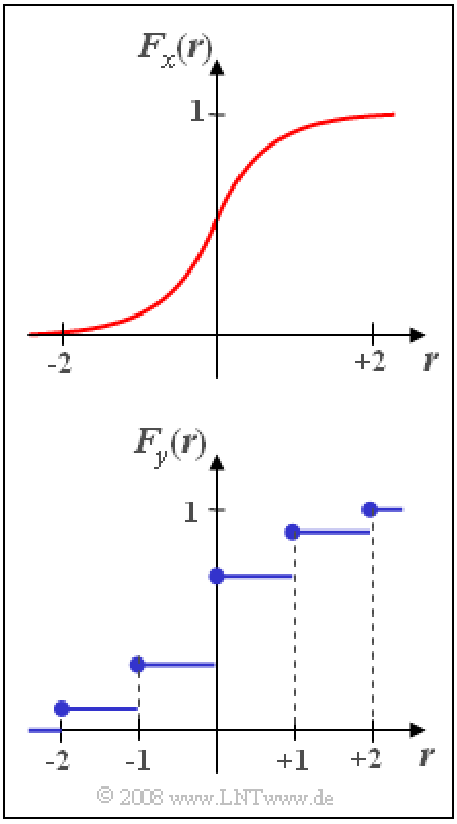
e) Es sei $x_{max} = 4V$. Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ y ist eine kontinuierliche Zufallsgröße.
- ☐ y ist eine diskrete Zufallsgröße.
- ☐ y ist eine gemischt kontinuierlich-diskrete Zufallsgröße.

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass y genau gleich 2V ist?

$\boldsymbol{x_{max} = 4V}$**:** $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{y} = \mathbf{2V})$ =

A3.2: cos²- und Dirac-VTF



Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie bei Aufgabe A3.1. Die WDF der wertkontinuierlichen Zufallsgröße ist in den Bereichen $|x| > 2$ identisch Null, und im Bereich $-2 \le x \le 2$ gilt:

$$f_x(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4} \cdot x).$$

Auch die diskrete Zufallsgröße y ist auf den Bereich ±2 begrenzt, wobei folgende Wahrscheinlichkeiten gelten:

$$\mathrm{Pr}(y = 0) = 0.4,$$

$$\mathrm{Pr}(y = +1) = \mathrm{Pr}(y = -1) = 0.2,$$

$$\mathrm{Pr}(y = +2) = \mathrm{Pr}(y = -2) = 0.1.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Inhalt von **Kapitel 3.2.** Gegeben ist hierzu die folgende Gleichung:

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax).$$

Eine Zusammenfassung der hier behandelten Thematik bietet das folgende Lernvideo:

Zusammenhang zwischen WDF und VTF (2-teilig: Dauer 6:40 – 3:20)

Fragebogen zu "A3.2: cos²- und Dirac-VTF"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind für die Verteilungsfunktion $F_x(r)$ der wertkontinuierlichen Zufallsgröße x richtig?

- ☐ Die VTF ist für alle Werte $r \le -2$ identisch 0.
- ☐ Die VTF ist für alle Werte $r \ge 2$ identisch 1.
- ☐ Der Verlauf von $F_x(r)$ ist monoton steigend.

b) Welche der nachfolgenden Aussagen sind für die Verteilungsfunktion $F_y(r)$ der wertdiskreten Zufallsgröße y richtig?

- ☐ Die VTF ist für alle Werte $r \le -2$ identisch 0.
- ☐ Die VTF ist für alle Werte $r > 2$ identisch 1.
- ☐ Der Verlauf von $F_y(r)$ ist monoton steigend.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_x(r)$. Beschränken Sie sich hier auf den Bereich $0 \le r \le 2$. Welcher Wert ergibt sich für $r = 1$?

$\boldsymbol{F_x(r = 1)}$ =

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $F_x(r)$ und $F_x(-r)$? Geben Sie den VTF-Wert für –1 ein.

$\boldsymbol{F_x(r = -1)}$ =

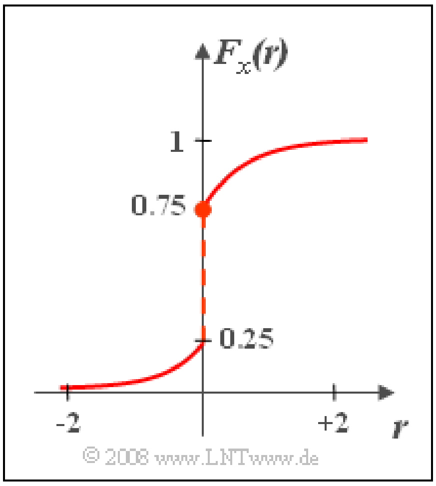
e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass x betragsmäßig kleiner als 1 ist. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis von Aufgabe 3.1(g).

$\mathbf{Pr}(|\boldsymbol{x}| < 1)$ =

f) Welchen Wert erhält man für die Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsgröße y an der Stelle $r = 0$?

$\boldsymbol{F_y(r = 0)}$ =

Z3.2: Zusammenhang WDF/VTF



Gegeben ist die Zufallsgröße x mit der Verteilungsfunktion

$$F_x(r) = \begin{cases} 0.25 \cdot \mathrm{e}^{2r} & \text{für } r < 0, \\ 1 - 0.25 \cdot \mathrm{e}^{-2r} & \text{für } r \geq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist rechts dargestellt. Es ist zu erkennen, dass an der Sprungstelle $r = 0$ der rechtsseitige Grenzwert gültig ist.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Inhalt von **Kapitel 3.1** und **Kapitel 3.2.** Eine Zusammenfassung der hier behandelten Thematik bietet das folgende Lernvideo:

Zusammenhang zwischen WDF und VTF (2-teilig: Dauer 6:40 – 3:20)

Fragebogen zu "Z3.2: Zusammenhang WDF/VTF"

a) Welche Eigenschaften einer Verteilungsfunktion (VTF) gelten allgemein, also nicht nur bei diesem konkreten Beispiel?

- ☐ Die VTF steigt von 0 auf 1 zumindest schwach monoton an.
- ☐ Die $F_x(r)$-Werte 0 und 1 sind für endliche r-Werte möglich.
- ☐ Ein horizontaler Abschnitt weist darauf hin, dass in diesem Bereich die Zufallsgröße keine Anteile besitzt.
- ☐ Vertikale Abschnitte sind möglich.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x positiv ist?

Pr(x > 0) =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $|x|$ größer ist als 0.5?

Pr (|x| > 0.5) =

d) Geben Sie die zugehörige WDF $f_x(x)$ allgemein und den Wert für x = 1 an.

$f_x(x = 1)$ =

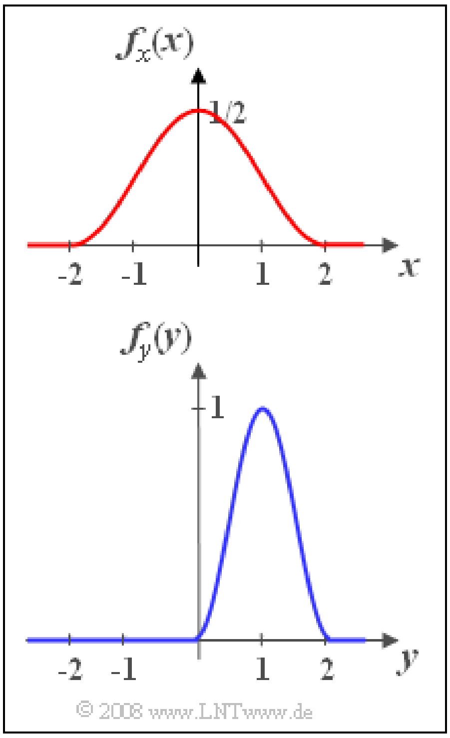
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeiten, dass x genau gleich 1 ist?

Pr(x = 1) =

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeiten, dass x genau gleich 0 ist?

Pr(x = 0) =

A3.3: Momente bei cos²-WDF



Wie in **Aufgabe A3.1** und **Aufgabe A3.2** betrachten wir die auf den Wertebereich von –2 bis +2 beschränkte Zufallsgröße x mit folgender WDF in diesem Abschnitt:

$$f_x(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\pi/4 \cdot x).$$

Daneben betrachten wir eine zweite Zufallsgröße y, die nur Werte zwischen 0 und 2 mit folgender WDF liefert:

$$f_y(y) = \sin^2(\pi/2 \cdot y).$$

Beide Dichtefunktionen sind in der Grafik abgebildet.

Außerhalb der Bereiche $-2 < x < +2$ bzw. $0 < y < 2$ gilt jeweils $f_x(x) = 0$ bzw. $f_y(y) = 0$. Weiter ist anzumerken, dass die beiden Zufallsgrößen als (normierte) Momentanwerte der zugehörigen Zufallssignale $x(t)$ bzw. $y(t)$ aufgefasst werden können.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Inhalt von **Kapitel 3.3.** Für die Lösung dieser Aufgabe können Sie das folgende unbestimmte Integral benutzen:

$$\int x^2 \cdot \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \cdot \cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cdot \sin(ax).$$

Fragebogen zu "A3.3: Momente bei cos²-WDF"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen bei jeder beliebigen WDF $f_x(x)$ für m_1: linearer Mittelwert, m_2: quadratischer Mittelwert und σ^2: Varianz zu?

- [ ] $m_2 = 0$, falls $m_1 \neq 0$.
- [ ] $m_2 = 0$, falls $m_1 = 0$.
- [ ] $m_1 = 0$, falls $m_2 = 0$.
- [ ] $m_2 > \sigma^2$, falls $m_1 \neq 0$.
- [ ] $m_1 = 0$, falls $f_x(-x) = f_x(x)$.
- [ ] $f_x(-x) = f_x(x)$, falls $m_1 = 0$.

b) Wie groß ist der Gleichanteil (lineare Mittelwert) des Signals $x(t)$?

$\boldsymbol{m_x}$ =

c) Wie groß ist der Effektivwert des Signals $x(t)$?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ =

d) Die Zufallsgröße y lässt sich aus x ableiten. Welche Zuordnung gilt?

- ○ $y = 1 + x/2$
- ○ $y = 2x$
- ○ $y = x/2–1$

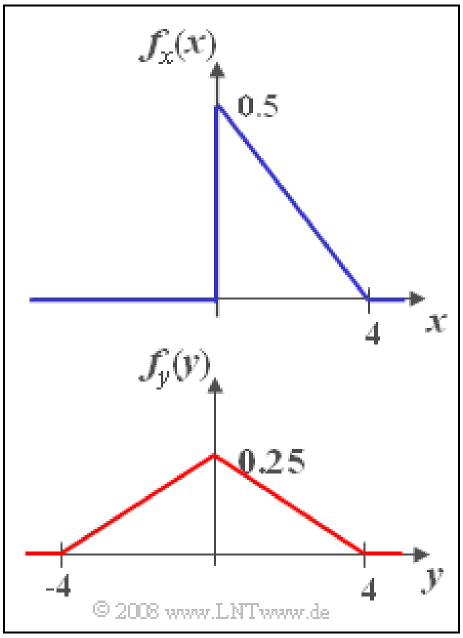
e) Wie groß ist der Gleichanteil des Signals $y(t)$?

$\boldsymbol{m_y}$ =

f) Wie groß ist der Effektivwert des Signals $y(t)$?

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

Z3.3: Momente bei Dreieck-WDF



Wir betrachten in dieser Aufgabe zwei Zufallssignale $x(t)$ und $y(t)$ mit jeweils dreieckförmiger WDF, nämlich die

- einseitige Dreieck-WDF (siehe obere Grafik):

$$f_x(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot (1 - x/4) & \text{für } 0 \le x \le 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- zweiseitige Dreieck-WDF (siehe untere Grafik):

$$f_y(y) = \begin{cases} 0.25 \cdot (1 - |y|/4) & \text{für } -4 \le y \le 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berücksichtigen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung für die Zentralmomente:

$$\mu_k = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} \cdot m_k \cdot (-m_1)^{k-\kappa}.$$

Im Einzelnen ergeben sich hierfür

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = m_2 - m_1^2, \qquad \mu_3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3,$$

$$\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4.$$

Aus den Zentralmomenten höherer Ordnung kann man unter anderem ableiten:

- die *Charliersche Schiefe*:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

- die *Kurtosis K*:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 3.3.**

Fragebogen zu "Z3.3: Momente bei Dreieck-WDF"

a) Berechnen Sie aus der vorliegenden WDF $f_x(x)$ das Moment k-ter Ordnung (m_k). Welcher Wert ergibt sich für den linearen Mittelwert $m_x = m_1$?

$\boldsymbol{m_x}$ =

b) Wie groß sind der quadratische Mittelwert und die Streuung σ_x?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ =

c) Wie groß ist bei der Zufallsgröße x die Charliersche Schiefe $S_x = \mu_3/\sigma^3$? Warum ist dieser Wert ungleich 0?

$\boldsymbol{S_x}$ =

d) Welche Aussagen treffen für die symmetrisch verteilte Zufallsgröße y zu?

- ☐ Alle Momente m_k mit ungeradzahligem k sind 0.
- ☐ Alle Momente m_k mit geradzahligem k sind 0.
- ☐ Alle Momente m_k mit geradem k sind wie in a) berechnet.
- ☐ Die Zentralmomente μ_k sind gleich den Momenten m_k.

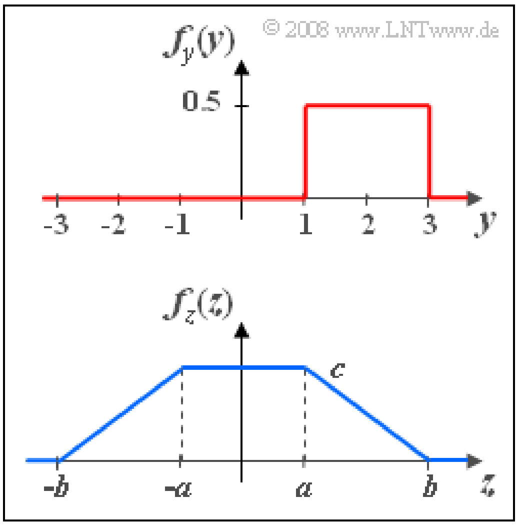
e) Berechnen Sie die Streuung der Zufallsgröße y.

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

f) Welcher Wert ergibt sich für die Kurtosis K_y der Zufallsgröße y? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boldsymbol{K_y}$ =

A3.4: Charakteristische Funktion



Gegeben seien hier die drei Zufallsgrößen x, y und z durch ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

- Über die Zufallsgröße x ist nichts weiter bekannt: Diese kann sowohl eine diskrete als auch eine kontinuierliche Zufallsgröße sein und eine beliebige WDF $f_x(x)$ besitzen. Der Mittelwert ist allgemein gleich m_x.
- Die Zufallsgröße y kann nur Werte im Bereich von 1 bis 3 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen ⇒ Mittelwert $m_y = 2$.
- Die Zufallsgröße z besitzt die folgende charakteristische Funktion:

  $$C_z(\Omega) = \mathrm{si}(3\Omega) \cdot \mathrm{si}(2\Omega).$$

  Daneben wird noch der qualitative Verlauf der WDF $f_z(z)$ entsprechend der blauen Skizze als bekannt vorausgesetzt. Zu bestimmen sind die WDF-Parameter a, b und c.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 3.3 – Seite 5.** Die charakteristische Funktion einer zwischen $\pm a$ gleichverteilten Zufallsgröße z lautet:

$$C_z(\Omega) = \mathrm{si}(a\Omega) \quad \text{mit} \quad \mathrm{si}(x) = \sin(x)/x.$$

Fragebogen zu "A3.4: Charakteristische Funktion"

a) Welche Aussagen sind bezüglich der charakteristischen Funktion $C_x(\Omega)$ stets – also bei beliebiger WDF – gültig?

- [ ] $C_x(\Omega)$ ist die Fouriertransformierte von $f_x(x)$.
- [ ] Der Realteil von $C_x(\Omega)$ ist eine gerade Funktion in Ω.
- [ ] Der Imaginärteil von $C_x(\Omega)$ ist eine ungerade Funktion in Ω.
- [ ] Der Wert an der Stelle $\Omega = 0$ ist stets 1.
- [ ] Bei mittelwertfreier Zufallsgröße ($m_x = 0$) ist $C_x(\Omega)$ stets reell.

b) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $C_y(\Omega)$. Wie groß sind Real- und Imaginärteil bei $\Omega = \pi/2$?

Re$[C_y(\Omega = \pi/2)]$ =

Im$[C_y(\Omega = \pi/2)]$ =

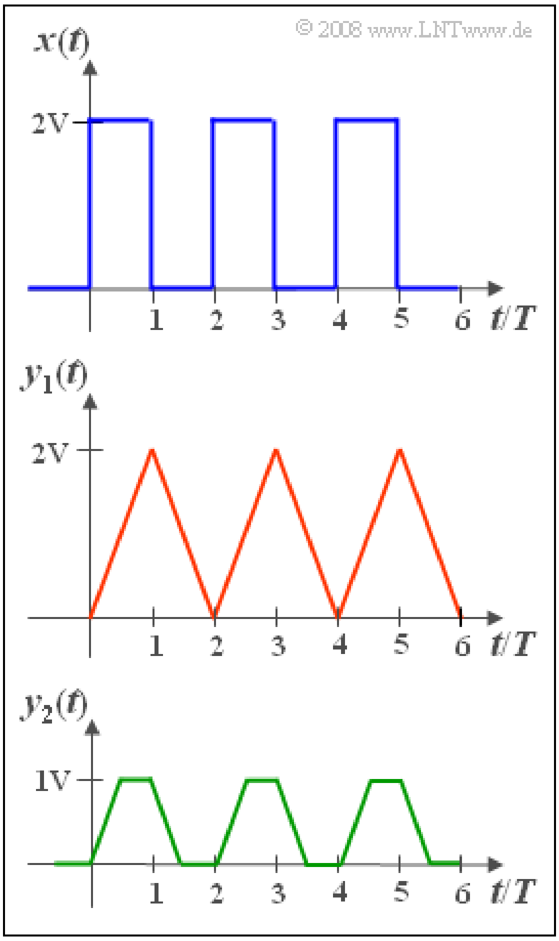
c) Bestimmen Sie die Kenngrößen a, b und c der WDF $f_z(z)$:

a =

b =

c =

A3.5: Dreieck- und Trapezsignal



Wir gehen vom Rechtecksignal $x(t)$ gemäß dem oberen Bild aus. Die Amplitudenwerte sind 0V und 2V, die Dauer eines Rechtecks sowie der Abstand zweier aufeinander folgender Rechteckimpulse seien jeweils gleich T. Die Zufallsgröße x – der Momentanwert des Rechtecksignals $x(t)$ – hat somit folgende Kennwerte: $m_x = \sigma_x = 1\text{V}$.

Gibt man nun dieses Signal auf ein lineares Filter mit der Impulsantwort

$$h_1(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so ergibt sich an dessem Ausgang entsprechend der Faltung das Dreiecksignal $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$ mit

- den Minimalwerten 0V (bei $t = 0, 2T, 4T, ...$),
- den Maximalwerten 2V (bei $t = T, 3T, 5T, ...$).

Bei diesem Tiefpassfilter handelt es sich also um einen Integrator über die Zeitdauer T.

Legt man dagegen das Rechtecksignal $x(t)$ an den Eingang eines Filters mit der Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } 0 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so ergibt sich das unten dargestellte trapezförmige Signal $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$. Dieses zweite Filter wirkt somit als ein Integrator über die Zeitdauer $T/2$.

Anzumerken ist, dass für die zugehörigen Frequenzgänge $H_1(f = 0) = 1$ bzw. $H_2(f = 0) = 0.5$ gilt.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "A3.5: Dreieck- und Trapezsignal"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] y_1 ist eine kontinuierliche Zufallsgröße.
- [ ] y_1 besitzt eine dreieckförmige WDF.
- [ ] y_1 ist gleichverteilt.
- [ ] y_2 hat kontinuierliche und diskrete Anteile.

b) Wie groß ist der Gleichanteil des Signals $y_1(t)$? Überprüfen Sie diesen Wert auch anhand der Größen m_x und $H_1(f = 0)$.

$\boldsymbol{m_{y_1}}$ = V

c) Bestimmen Sie die Leistung des Signals $y_1(t)$ durch Zeitmittelung.

$\boldsymbol{P_{y_1}}$ = V^2

d) Berechnen Sie die Leistung P_{y1} auch aus der hier vorliegenden WDF. Wie groß ist der Effektivwert des Signals $y_1(t)$?

$\boldsymbol{\sigma_{y_1}}$ = V

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $y_1(t)$ größer als 0.75 V ist?

$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{y_1} > \mathbf{0.75V})$ =

f) Ermitteln Sie die WDF des Signals $y_2(t)$ und skizzieren Sie diese. Geben Sie zur Kontrolle den WDF-Wert an der Stelle $y_2 = 0.5$ V ein.

$\boldsymbol{f_{y_2}(y_2} = \mathbf{0.5V})$ = 1/V

g) Wie groß ist der Gleichanteil des Signals $y_2(t)$? Überprüfen Sie diesen Wert anhand der Größen m_x und $H_2(f = 0)$.

$\boldsymbol{m_{y_2}}$ = V

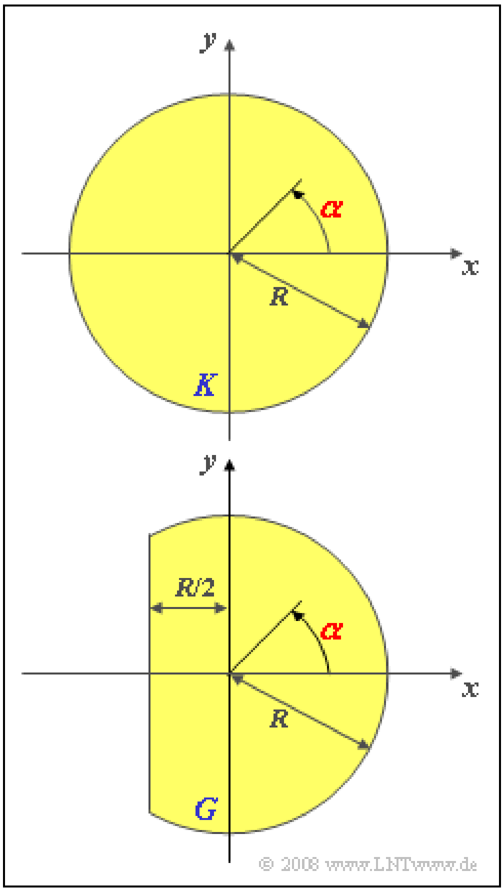
h) Wie groß ist der Effektivwert des Signals $y_2(t)$?

$\boldsymbol{\sigma_{y_2}}$ = V

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $y_2(t)$ größer als 0.75 V ist?

$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{y_2} > \mathbf{0.75V})$ =

Z3.5: Antennengebiete



Wir betrachten zunächst – wie im oberen Bild skizziert – eine Empfangsantenne, die ein kreisförmiges Gebiet K versorgt. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Antenne „K" alle unter unterschiedlichen Winkeln α einfallenden Signale gleich gut detektieren kann. Entsprechend der Skizze bezieht sich der Winkel α auf die x-Achse. Der Wert $\alpha = 0$ bedeutet demnach, dass sich das Signal in Richtung der negativen x-Achse auf die Antenne zu bewegt.

Der Wertebereich des Einfallswinkels α beträgt mit dieser Definition $-\pi < \alpha \le +\pi$.

Weiter setzen wir voraus, dass sich sehr viele Teilnehmer im Versorgungsgebiet aufhalten und dass deren Positionen (x, y) „statistisch" über das Gebiet K verteilt sind.

Ab der Teilaufgabe e) gehen wir von dem unten skizzierten Versorgungsgebiet G aus. Wegen eines Hindernisses muss nun die x-Koordinate aller Teilnehmer stets größer als $-R/2$ sein. Im nun nicht mehr kreisförmigen Versorgungsgebiet G seien die Teilnehmer wieder „statistisch verteilt".

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "Z3.5: Antennengebiete"

a) Wie lautet die WDF $f_\alpha(\alpha)$? Welcher Wert ergibt sich für $\alpha = 0$?

$\boldsymbol{f_\alpha(\alpha = 0)}$ =

b) Welche der beiden Aussagen ist richtig? Beachten Sie insbesondere auch den unsymmetrischen Definitionsbereich von $-\pi < \alpha \leq +\pi$.

- ◯ Der Erwartungswert E[α] ist 0.
- ◯ Der Erwartungswert E[α] ist ungleich 0.

c) Welcher Wert ergibt sich für die Streuung der Zufallsgröße α?

$\boldsymbol{\sigma_\alpha}$ =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Antenne einen Teilnehmer unter einem Winkel zwischen –45° und +45° ortet?

Pr($\boldsymbol{-\pi/4 \leq \alpha \leq +\pi/4}$**)** =

e) Nun betrachten wir das untere Versorgungsgebiet G. In welchem Bereich $-\alpha_0 \leq \alpha \leq +\alpha_0$ hat diese WDF $f_\alpha(\alpha)$ einen konstanten Wert?

$\boldsymbol{\alpha_0}$ = rad

f) Welche Aussagen sind hinsichtlich $f_\alpha(\alpha)$ im Bereich $|\alpha| > \alpha_0$ gültig?

- ☐ Die WDF hat „außen” den gleichen Verlauf wie „innen”.
- ☐ Die WDF ist hier 0.
- ☐ Die WDF fällt in diesem Bereich zu den Rändern hin ab.
- ☐ Die WDF steigt in diesem Bereich zu den Rändern hin an.

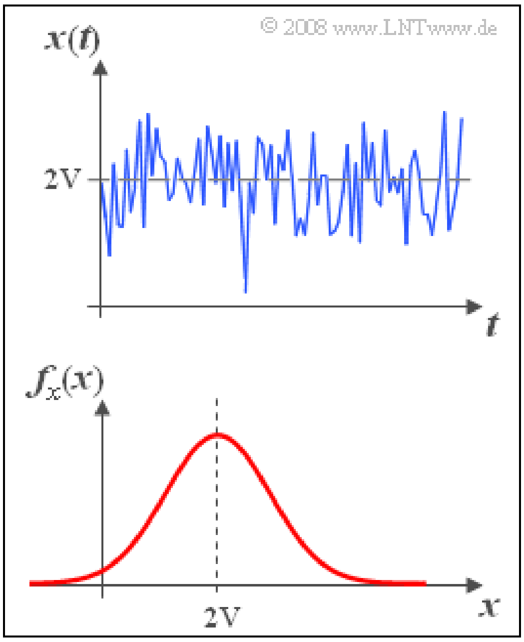
g) Berechnen Sie für das Gebiet G die Wahrscheinlichkeit, dass die Antenne einen Teilnehmer unter einem Winkel zwischen ±45° ortet. Interpretation.

Pr($\boldsymbol{-\pi/4 < \alpha < +\pi/4}$**)** =

h) Wie groß ist nun der WDF–Wert an der Stelle $\alpha = 0$?

$\boldsymbol{f_\alpha(\alpha = 0)}$ =

A3.6: Verrauschtes Gleichsignal



Ein Gleichsignal $s(t)$ = 2V wird durch ein Rauschsignal $n(t)$ additiv überlagert. Im oberen Bild sehen Sie einen Ausschnitt des Summensignals

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kurz WDF) des Signals $x(t)$ ist im unteren Bild dargestellt. Die (auf den Widerstand 1 Ω bezogene) Gesamtleistung dieses Signals beträgt $P_x = 5\ \text{V}^2$.

Verwenden Sie zur Lösung das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral Q(x). Nachfolgend finden Sie einige Werte dieser monoton abfallenden Funktion:

$$\text{Q}(0) = 0.5, \qquad \text{Q}(1) = 0.1587,$$
$$\text{Q}(2) = 0.0227, \quad \text{Q}(3) = 0.0013.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 3.5.**

Fragebogen zu "A3.6: Verrauschtes Gleichsignal"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Das Nutzsignal $s(t)$ ist gleichverteilt.
- ☐ Das Rauschsignal $n(t)$ ist gaußverteilt.
- ☐ Das Rauschsignal $n(t)$ hat einen Mittelwert $m_n \neq 0$.
- ☐ Das Gesamtsignal $x(t)$ ist gaußverteilt mit Mittelwert $m_x = 2$ V.

b) Berechnen Sie die Standardabweichung (Streuung) des Signals $x(t)$.

$\boldsymbol{\sigma_x}$ = V

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x(t)$ kleiner als 0 V ist?

Pr(x < 0 V) = %

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x(t)$ größer als 4 V ist?

Pr(x > 4 V) = %

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt $x(t)$ zwischen 3 V und 4 V?

Pr(3 V < x < 4 V) = %

Z3.6: Prüfungskorrektur

An einer Prüfung an der TU München haben 1000 Studentinnen und Studenten teilgenommen. Die maximal erreichbare Punktzahl betrug 100. Aufgrund der relativ großen Teilnehmerzahl ergibt sich für die erreichte Punktzahl – dies sei die Zufallsgröße z – mit guter Näherung eine Gaußverteilung („Normalverteilung”) mit Mittelwert m_z = 60 und Streuung (Standardabweichung) σ_z = 10. Der beste Student erreichte 88 Punkte.

Bei der Korrektur wurden nicht nur ganze Punktezahlen vergeben, sondern auch (beliebige) Zwischenwerte, so dass man die Zufallsgröße z mit guter Näherung als „kontinuierlich” auffassen kann.

Die Prüfungsordnung sieht folgende Noten vor:

1.0, 1.3, 1.7, 2.0, 2.3, 2.7, 3.0, 3.3, 3.7, 4.0, 4.3, 4.7, 5.0.

Ab der Note 4.0 gilt die Prüfung als bestanden.

x	$\phi(x)$	$Q(x)$
0	0.5000	0.5000
0.2	0.5792	0.4207
0.4	0.6554	0.3446
0.6	0.7257	0.2742
0.8	0.7881	0.2118
1.0	0.8413	0.1586
1.2	0.8849	0.1150
1.4	0.9192	0.0807
1.6	0.9452	0.0547
1.8	0.9640	0.0359
2.0	0.9772	0.0227
2.2	0.9860	0.0139
2.4	0.9918	0.0081
2.6	0.9953	0.0046
2.8	0.9974	0.0025
3.0	0.9986	0.0013

Für die Bewertung wurden als Richtlinien vorgegeben:

- Auch mit 6 Punkten weniger als der Beste (also ab 82 Punkten) soll man 1.0 bekommen.
- Hat man 46% der Gesamtpunktzahl erreicht, so hat man die Prüfung bestanden.
- Die Punkte/Noten-Zuordnung soll linear erfolgen.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 3.5.**

Fragebogen zu "Z3.6: Prüfungskorrektur"

a) Welche Kriterien sind bei der Aufgabenerstellung unbedingt zu beachten, damit die Punktezahl annähernd eine Normalverteilung ergeben wird?

- ☐ Es gibt viele Prüfungsteilnehmer.
- ☐ Die Teilaufgaben hängen in starkem Maße voneinander ab.
- ☐ Es gibt viele unabhängige Aufgaben.
- ☐ Die Prüfung besteht aus einer Frage mit Ja/Nein-Antwort.

b) Wieviele Teilnehmer werden voraussichtlich mit „1.0“ abschließen?

$N_{1.0}$ =

c) Wieviele Teilnehmer werden wohl nicht bestehen? Berücksichtigen Sie, dass z als eine kontinuierliche Zufallsgröße aufgefasst werden kann.

$N_{4.3\ ...\ 5.0}$ =

d) Legen Sie die Punkte/Noten–Zuordnung fest. Ab wann bekommt man eine „3.0“? Wieviele Prüfungsteilnehmer werden diese Note erhalten?

$N_{3.0}$ =

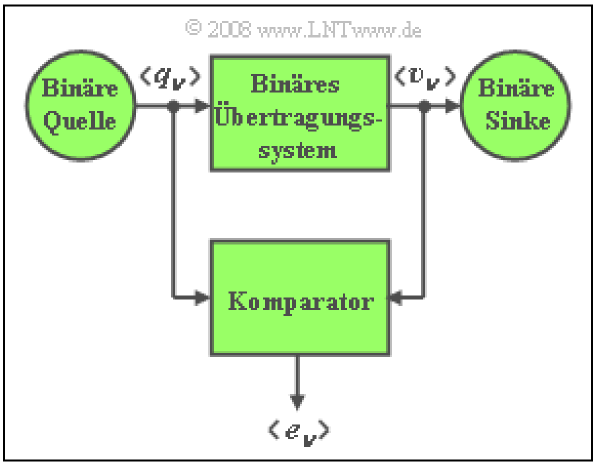
e) Wieviele Teilnehmer erhalten voraussichtlich die Note „2.7“? Begründen Sie, warum genau so viele Prüflinge die Note „3.3“ bekommen werden.

$N_{2.7}$ =

f) Welche Mittelnote wird sich bei dieser Prüfung ergeben? Berücksichtigen Sie zur Lösung dieser Teilaufgabe das Ergebnis von (e).

Mittelnote =

A3.7: Bitfehlerquote (BER)



Wir betrachten ein binäres Übertragungssystem mit

- der Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ und
- der Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$.

Stimmen Sinkensymbol v_ν und Quellensymbol q_ν nicht überein, so liegt ein Bitfehler ($e_\nu = 1$) vor. Ansonsten gilt $e_\nu = 0$.

Wichtigstes Beurteilungskriterium eines solchen Digitalsystems ist die *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* (englisch: *Bit Error Probability*).

Mit dem Erwartungswert E[...] ist diese ist wie folgt definiert:

$$p_\mathrm{B} = \mathrm{E}[\mathrm{Pr}(v_\nu \neq q_\nu)] = \mathrm{E}[\mathrm{Pr}(e_\nu = 1)] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Pr}(e_\nu = 1).$$

Der rechte Teil dieser Gleichung beschreibt eine Zeitmittelung und muss z. B. bei zeitvarianten Kanälen stets angewandt werden. Ist dagegen die Fehlerwahrscheinlichkeit für alle Symbole gleich (was hier vorausgesetzt werden soll), so kann man obige Gleichung wie folgt vereinfachen:

$$p_\mathrm{B} = \mathrm{E}[\mathrm{Pr}(e_\nu = 1)] = \mathrm{E}[e_\nu].$$

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist eine A-priori-Kenngröße, erlaubt also eine Vorhersage für das zu erwartende Resultat. Dagegen muss zur messtechnischen Ermittlung der Übertragungsqualität oder bei der Systemsimulation auf die vergleichbare A-posteriori-Kenngröße *Bitfehlerquote* (englisch: *Bit Error Rate*) übergegangen werden:

$$h_\mathrm{B} = \frac{n_\mathrm{B}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} e_\nu.$$

Diese ist eine relative Häufigkeit, wobei n_B die Anzahl der aufgetretenen Bitfehler angibt, wenn insgesamt N Symbole (Bit) übertragen wurden.

Im Grenzfall $N \to \infty$ stimmt die relative Häufigkeit h_B mit der Wahrscheinlichkeit p_B überein. Hier soll nun die Frage geklärt werden, mit welcher statistischen Unsicherheit bei endlichem N gerechnet werden muss.

Lösen Sie die Aufgaben so weit wie möglich allgemein. Verwenden Sie zur Kontrolleingabe die Parameterwerte $p_\mathrm{B} = 10^{-3}$ und $N = 10^5$. Nachfolgend finden Sie einige Werte der sogenannten Q-Funktion:

$$\mathrm{Q}(1.00) = 0.159, \quad \mathrm{Q}(1.65) = 0.050, \quad \mathrm{Q}(1.96) = 0.025, \quad \mathrm{Q}(2.59) = 0.005.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 3.5.**

Fragebogen zu "A3.7: Bitfehlerquote (BER)"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Für n_B sind alle Werte (0, ... , N) gleichwahrscheinlich.
- [ ] Die Zufallsgröße n_B ist binomialverteilt.
- [ ] Mit $p_B = 10^{-3}$ und $N = 10^5$ ergibt sich $E[n_B] = 100$.

b) Wie groß ist die Streuung der Zufallsgröße n_B für $p_B = 10^{-3}$ und $N = 10^5$?

σ_{nB} =

c) Welche Werte kann die Bitfehlerquote h_B annehmen? Zeigen Sie, dass der Mittelwert m_{hB} gleich der tatsächlichen Fehlerwahrscheinlichkeit p_B ist. Wie groß ist deren Streuung?

σ_{hB} =

d) Unter gewissen Voraussetzungen kann eine binomialverteilte Zufallsgröße durch eine Gaußverteilung mit gleichem Mittelwert (m_{hB}) und gleicher Streuung (σ_{hB}) angenähert werden. Welche Aussage ist zutreffend?

- [ ] $\Pr(|h_B - p_B| \le \varepsilon) = 1 - 2 \cdot Q(\varepsilon/\sigma_{hB})$.
- [ ] $\Pr(|h_B - p_B| \le \varepsilon) = 1 - Q(2 \cdot \varepsilon/\sigma_{hB})$.

e) Zur Abkürzung verwenden wir das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = \Pr(|h_B - p_B| \le \varepsilon)$. Welcher Wert ergibt sich für p_ε mit $\varepsilon = 10^{-4}$, $p_B = 10^{-3}$ und $N = 10^5$?

p_ε =

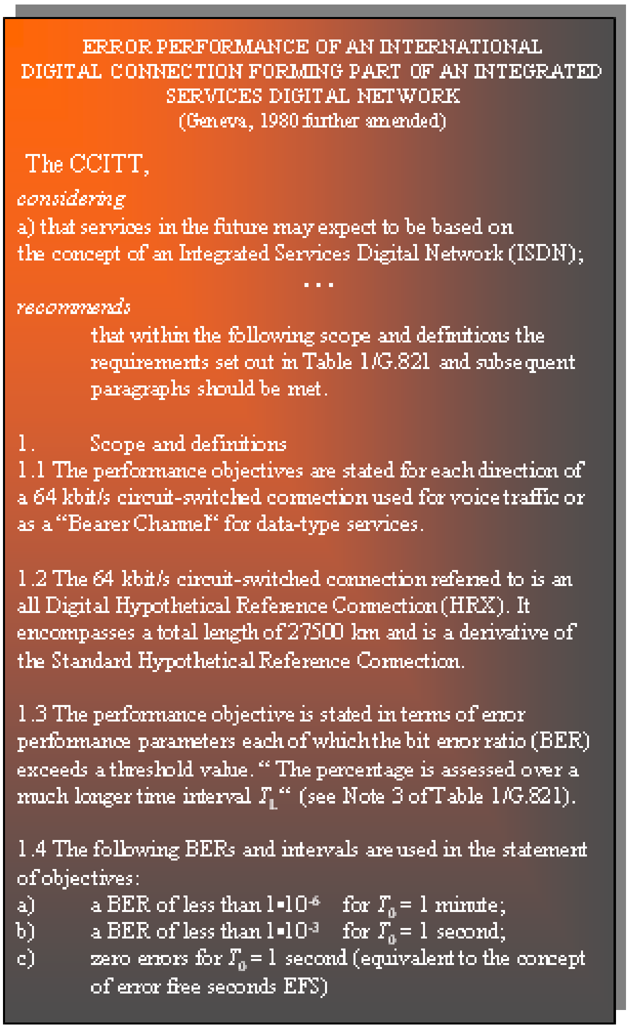
f) Das Argument der Q–Funktion sei α. Wie groß muss α mindestens gewählt werden, damit das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = 95\%$ beträgt?

α =

g) Es gelte weiterhin $p_B = 10^{-3}$ und $p_\varepsilon = 95\%$. Über wie viele Symbole muss man mindestens mitteln, damit die ermittelte Bitfehlerquote im Bereich zwischen $0.9 \cdot 10^{-3}$ und $1.1 \cdot 10^{-3}$ liegt ($\varepsilon = 10^{-4}$, 10% vom Sollwert)?

N_{min} =

Z3.7: Error Performance


ERROR PERFORMANCE OF AN INTERNATIONAL DIGITAL CONNECTION FORMING PART OF AN INTEGRATED SERVICES DIGITAL NETWORK
(Geneva, 1980 further amended)

The CCITT,

considering

a) that services in the future may expect to be based on the concept of an Integrated Services Digital Network (ISDN);

...

recommends

that within the following scope and definitions the requirements set out in Table 1/G.821 and subsequent paragraphs should be met.

1. Scope and definitions

1.1 The performance objectives are stated for each direction of a 64 kbit/s circuit-switched connection used for voice traffic or as a "Bearer Channel" for data-type services.

1.2 The 64 kbit/s circuit-switched connection referred to is an all Digital Hypothetical Reference Connection (HRX). It encompasses a total length of 27500 km and is a derivative of the Standard Hypothetical Reference Connection.

1.3 The performance objective is stated in terms of error performance parameters each of which the bit error ratio (BER) exceeds a threshold value. " The percentage is assessed over a much longer time interval T_L" (see Note 3 of Table 1/G.821).

1.4 The following BERs and intervals are used in the statement of objectives:

a) a BER of less than $1 \cdot 10^{-6}$ for T_0 = 1 minute;
b) a BER of less than $1 \cdot 10^{-3}$ for T_0 = 1 second;
c) zero errors for T_0 = 1 second (equivalent to the concept of error free seconds EFS)

Jeder Betreiber von ISDN-Systemen muss gewisse Mindestanforderungen hinsichtlich der Bitfehlerquote (BER) einhalten, die zum Beispiel in der CCITT-Empfehlung G.821 unter dem Namen *Error Performance* spezifiziert sind.

Rechts sehen Sie einen Auszug aus dieser Empfehlung. Diese besagt unter Anderem, dass – über eine ausreichend lange Zeit gemittelt – mindestens 99.8% aller Einsekunden-Intervalle eine Bitfehlerquote kleiner 10^{-3} (ein Promille) aufweisen müssen.

Bei einer Bitrate von 64 kbit/s entspricht dies der Bedingung, dass in einer Sekunde (und somit bei N = 64000 übertragenen Symbolen) nicht mehr als 64 Bitfehler auftreten dürfen:

$$\Pr(f \le 64) \ge 0.998.$$

Gehen Sie für die ersten drei Teilaufgaben stets von der Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ aus. In der gesamten Aufgabe gelte $N = 64000$.

In der Aufgabe A3.7 wurde darauf hingewiesen, dass unter gewissen Bedingungen – die hier alle erfüllt sind – die Binomialverteilung durch eine Gaußverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Streuung approximiert werden kann. Verwenden Sie diese Näherung bei Punkt (d).

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 3.5.**

Fragebogen zu "Z3.7: Error Performance"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen hinsichtlich der Zufallsgröße f zu?

- [ ] Die Zufallsgröße f ist binomialverteilt.
- [ ] f kann durch eine Poissonverteilung angenähert werden.

b) Welcher Wert ergibt sich für den Mittelwert der Zufallsgröße f?

m_f =

c) Wie groß ist die Streuung? Verwenden Sie geeignete Näherungen.

σ_f =

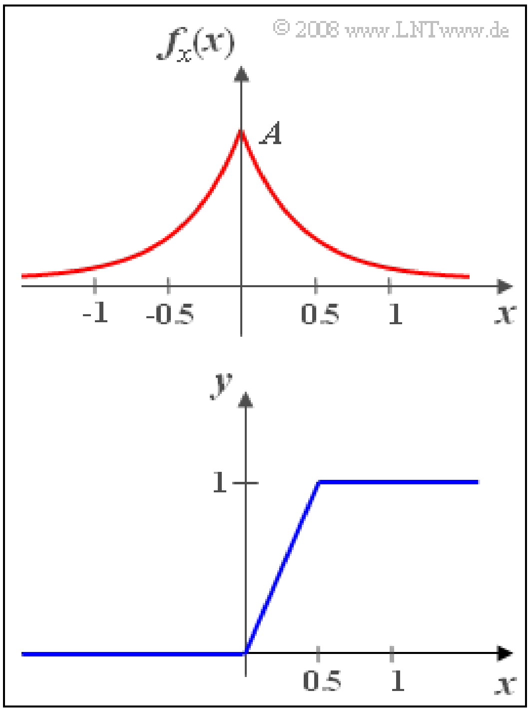
d) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 64 Bitfehler auftreten. Verwenden Sie hierzu die Gaußnäherung.

$\Pr(f \le 64)$ =

e) Wie groß darf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B höchstens sein, damit die Bedingung „Nur in höchstens 0.2% der Einsekunden-Intervalle 64 (oder mehr) Bitfehler" eingehalten werden kann? Es gilt $Q(2.9) \approx 0.002$.

$p_{B,\max}$ =

A3.8: Verstärkung und Begrenzung



Wir betrachtenein Zufallssignal $x(t)$ mit symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_x(x) = A \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot |x|}.$$

Dieses Signal wird an den Eingang einer Nichtlinearität mit der Kennlinie (siehe unteres Bild)

$$y = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 2x & \text{für } 0 \le x \le 0.5, \\ 1 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$$

angelegt. Das Ausgangssignal wird mit $y(t)$ bezeichnet.

Diese unten skizzierte Kennlinie begrenzt die Größe x am Eingang asymmetrisch und verstärkt sie im linearen Bereich.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.6.** Gegeben ist das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty x^n \cdot \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^n}.$$

Fragebogen zu "A3.8: Verstärkung und Begrenzung"

a) Berechnen Sie den Funktionswert $A = f_x(0)$ der WDF an der Stelle $x = 0$.

$\boldsymbol{A}$ =

b) Berechnen Sie die Momente m_k der Zufallsgröße x. Begründen Sie, dass alle Momente mit ungeradem Index null sind. Wie groß ist die Streuung?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ =

c) Welcher Wert ergibt sich für die Kurtosis der Zufallsgröße x?

$\boldsymbol{K_x}$ =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x den Wert 0.5 überschreitet?

Pr(x > 0.5) =

e) Welche der folgenden Aussagen sind bezüglich der WDF $f_y(y)$ zutreffend?

- ☐ Die WDF beinhaltet eine Diracfunktion bei $y = 0$.
- ☐ Die WDF beinhaltet eine Diracfunktion bei $y = 0.5$.
- ☐ Die WDF beinhaltet eine Diracfunktion bei $y = 1$.

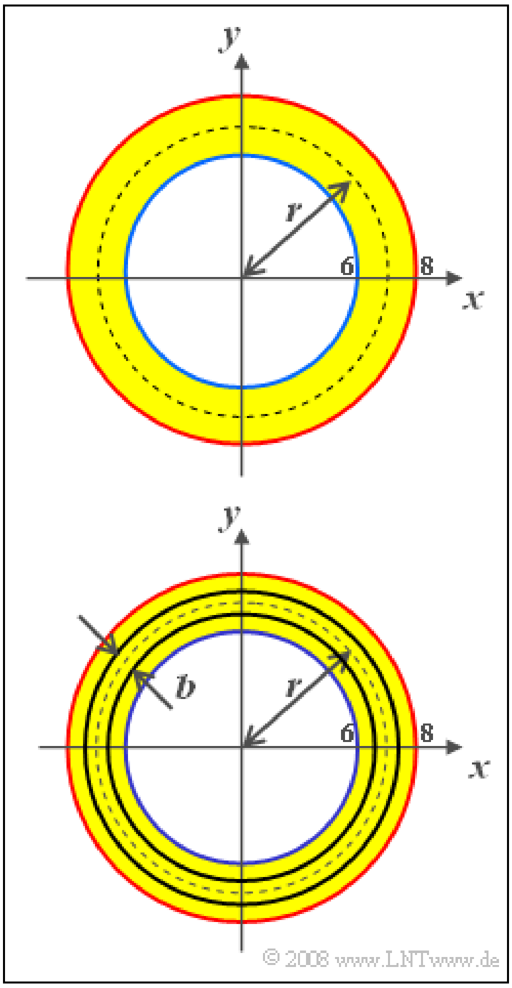
f) Wie lautet der kontinuierliche Anteil der WDF $f_y(y)$? Welcher Wert ergibt sich für $y = 0.5$?

$\boldsymbol{f_y(y = 0.5)}$ =

g) Wie groß ist der Mittelwert der begrenzten und verstärkten Zufallsgröße y?

$\boldsymbol{m_y}$ =

Z3.8: Kreis(ring)fläche



Wir betrachten unterschiedlich große Kreise. Der Radius r und die Fläche A lassen sich als Zufallsgrößen auffassen. Es wird vorausgesetzt, dass der Radius auf den Bereich $6 \le r \le 8$ beschränkt ist.

Im oberen Bild ist der Bereich, in dem solche Kreise (alle mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung) liegen können, gelb markiert. Weiterhin kann davon ausgegangen werden, dass der Radius in diesem Intervall gleichverteilt ist:

$$f_r(r) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } 6 \le r \le 8, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ab der Teilaufgabe (e) werden schmale Kreisringe mit dem Mittelradius r und der Breite b betrachtet (unteres Bild). Die Fläche eines solchen Kreisrings wird mit R bezeichnet. Die möglichen Mittelradien r seien wieder gleichverteilt zwischen 6 und 8, und die Kreisringbreite beträgt $b = 0.1$.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Theorieseite **Transformation von Zufallsgrößen** im Kapitel 3.6.

Fragebogen zu "Z3.8: Kreis(ring)fläche"

a) Geben Sie die Transformationskennlinie $A = g(r)$ analytisch an. Wie groß ist der Minimalwert der Zufallsgröße A?

$\boldsymbol{A_{\text{min}}}$ =

b) Wie groß ist der Maximalwert der Zufallsgröße A?

$\boldsymbol{A_{\text{max}}}$ =

c) Welcher Wert $m_A = E[A]$ ergibt sich für die „mittlere" Kreisfläche?

$\boldsymbol{m_{\text{A}}}$ =

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsgröße A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fläche A größer als 150 ist?

Pr(A > 150) =

e) Welche WDF besitzt die Zufallsgröße R (Fläche der Kreisringe gemäß der unteren Skizze)? Wie groß ist deren Minimalwert? Es gelte $b = 0.1$.

b = 0.1: $\boldsymbol{R_{\text{min}}}$ =

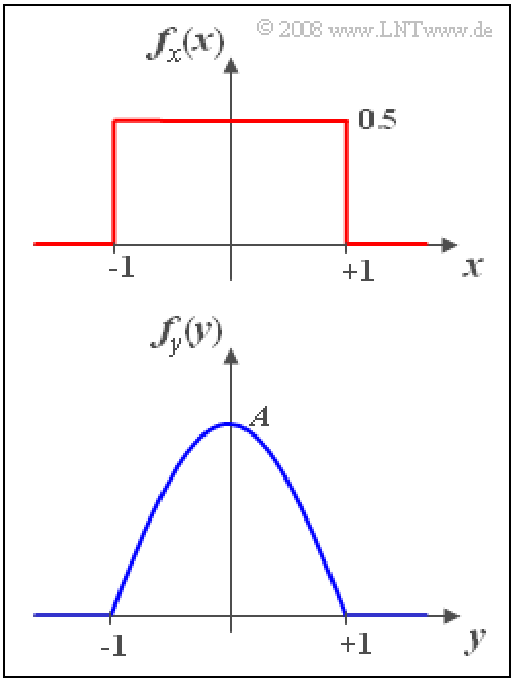
f) Welchen Maximalwert besitzt die Zufallsgröße R?

b = 0.1: $\boldsymbol{R_{\text{max}}}$ =

g) Wie groß ist der Erwartungswert der Zufallsgröße R?

b = 0.1: E[R] =

A3.9: Kennlinie für Cosinus-WDF



Gesucht ist eine stetige, monoton steigende nichtlineare Kennlinie $y = g(x)$, die aus einer zwischen –1 und +1 gleichverteilten Zufallsgröße x eine neue Zufallsgröße y mit cosinusförmiger WDF generiert:

$$f_y(y) = A \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot y).$$

Die Zufallsgröße y kann ebenfalls nur Werte zwischen −1 und +1 annehmen. Die beiden Dichtefunktionen $f_x(x)$ und $f_y(y)$ sind nebenstehend skizziert.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.6.**

Fragebogen zu "A3.9: Kennlinie für Cosinus-WDF"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Außerhalb des Bereichs $-1 \leq x \leq +1$ kann $g(x)$ beliebig sein.
- ☐ Die Kennlinie muss symmetrisch um $x = 0$ sein: $g(-x) = g(x)$.
- ☐ Die Zufallsgröße y hat eine kleinere Varianz als x.

b) Berechnen Sie den $f_y(y)$–Wert bei $y = 0$: $A = f_y(0)$.

$\boldsymbol{A}$ =

c) Bestimmen Sie die Steigung $h'(y)$ der Umkehrfunktion $x = h(y)$, wobei im Bereich $|y| \leq 1$ stets $h'(y) > 0$ gelten soll? Welche Steigung gilt bei $y = 0$?

$\boldsymbol{h'(y = 0)}$ =

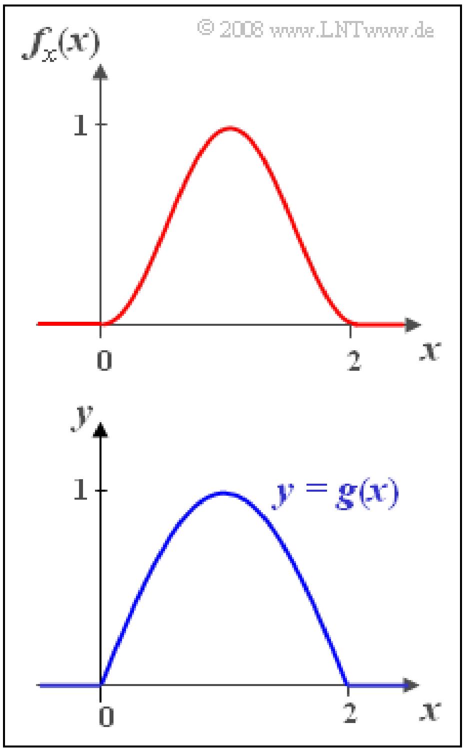
d) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus c) den Funktionsverlauf $x = h(y)$ unter der Nebenbedingung $h(0) = 0$. Welcher Wert ergibt sich für $y = 1$?

$\boldsymbol{h(y = 1)}$ =

e) Ermitteln Sie den Funktionsverlauf $y = g(x)$ der gesuchten Kennlinie. Welcher Funktionswert ergibt sich an der Stelle $x = 1$?

$\boldsymbol{g(x = 1)}$ =

Z3.9: Sinustransformation



Wir betrachten in dieser Aufgabe eine Zufallsgröße x mit $\sin^2$–förmiger WDF im Bereich zwischen 0 und 2 (außerhalb ist die WDF identisch 0):

$$f_x(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \qquad \text{für } 0 \le x \le 2.$$

Mittelwert und Streuung dieser Zufallsgröße x wurden bereits in der **Aufgabe A3.3** ermittelt:

$$m_x = 1, \;\; \sigma_x = 0.361.$$

Eine weitere Zufallsgröße y erhält man durch Transformation mittels der nichtlinearen Kennlinie

$$y = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right).$$

Die Abbildung zeigt oben die WDF $f_x(x)$ und unten die nichtlineare Kennlinie $y = g(x)$ im Bereich $0 \le x \le 2$.

Hinweis: Die Aufgabe basiert auf den theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.3** und bezieht sich auch auf **Kapitel 3.6, Seite 2.** Vorgegeben sind die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \sin^3(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3a} \cdot \cos^3(ax) - \frac{1}{a} \cdot \cos(ax),$$

$$\int \sin^4(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} \cdot x - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + \frac{1}{32a} \cdot \sin(4ax).$$

Fragebogen zu "Z3.9: Sinustransformation"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ y ist auf den Wertbereich $0 \le y \le 1$ begrenzt.
- ☐ y ist auf den Wertbereich $0 < y \le 1$ begrenzt.
- ☐ Der Mittelwert m_y ist kleiner als der Mittelwert m_x.

b) Berechnen Sie den Mittelwert der Zufallsgröße y.

$\boldsymbol{m_y}$ =

c) Berechnen Sie den quadratischen Mittelwert von y und die Streuung.

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

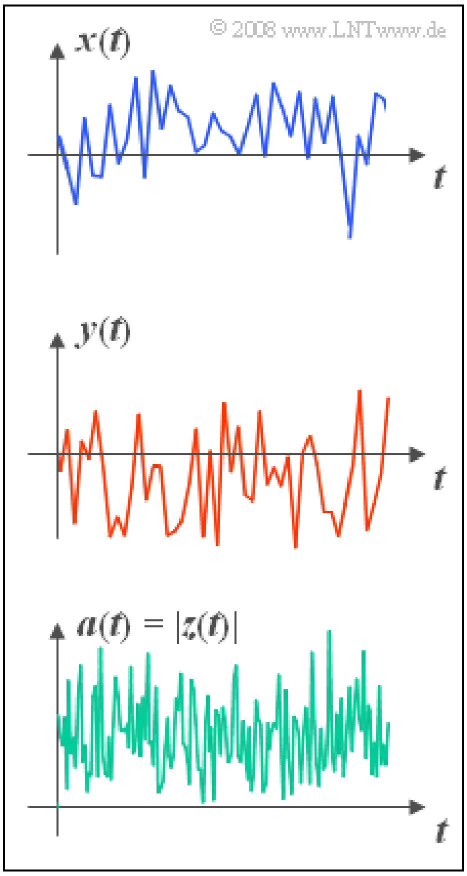
d) Berechnen Sie die WDF $f_y(y)$. *Hinweis*: Symmetrieeigenschaften beachten. Welcher WDF–Wert ergibt sich für $y = 0.6$?

$\boldsymbol{f_y(y = 0.6)}$ =

e) Welcher WDF-Wert ergibt sich für $y = 1$? Interpretieren Sie das Ergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass y exakt gleich 1 ist?

Pr(y = 1) =

A3.10: Rayleighfading



Häufig beschreibt man ein Bandpassübertragungssystem im sogenannten *äquivalenten Tiefpassbereich*. Diese Darstellung führt zu einem komplexen Signal (vgl. Buch 1, Kapitel 4):

$$z(t) = x(t) + \mathrm{j} \cdot y(t).$$

Der Realteil $x(t)$ kennzeichnet hierbei die *Inphasekomponente* und der Imaginärteil die *Quadraturkomponente*.

Bei einem Mobilfunksystem, bei dem zwischen dem mobilen Teilnehmer und der sog. Basisstation keine Sichtverbindung besteht, gelangt somit das Funksignal ausschließlich auf indirekten Wegen (Brechung, Streuung, Reflexion usw.) zum Empfänger. In diesem Fall ist folgendes Modell anwendbar:

- Der Realteil $x(t)$ und auch der Imaginärteil $y(t)$ sind jeweils gaußverteilt und mittelwertfrei.
- $x(t)$ und $y(t)$ besitzen jeweils die gleiche Streuung σ und sind voneinander unabhängig.
- Innere Bindungen der Signale $x(t)$ und $y(t)$ aufgrund des Dopplereffekts sollen hier nicht beachtet werden.

Das komplexe Signal $z(t)$ kann man auch nach Betrag und Phase darstellen:

$$z(t) = a(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(t)}.$$

Aufgrund der Symmetrie bezüglich $x(t)$ und $y(t)$ ist die Phase $\phi(t)$ gleichverteilt. Dagegen ist der Betrag $a(t) = |z(t)|$ rayleighverteilt, was zu der Namensgebung *Rayleighfading* geführt hat.

Als weitere Größe definieren wir noch die Momentanleistung

$$p(t) = x^2(t) + y^2(t) = a^2(t).$$

Die Zufallsgröße p ist hier (einseitig) exponentialverteilt. Deren WDF lautet für $p > 0$:

$$f_p(p) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \mathrm{e}^{-p/(2\sigma^2)}.$$

Für alle negativen p-Werte gilt natürlich $f_p(p) = 0$, da p eine Leistung kennzeichnet.

Im Folgenden werden die Streuungen der beiden Gaußschen Zufallsgrößen x und y stets zu $\sigma = 1$ vorausgesetzt. Alle Größen sind deshalb als normiert zu verstehen.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Rayleighverteilung** im Kapitel 3.7.

Fragebogen zu "A3.10: Rayleighfading"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind stets zutreffend?

- ☐ Kleine Momentanleistungen sind wahrscheinlicher als große.
- ☐ Die Phase $\phi(t) = \pi/2$ bedeutet auch „Imaginärteil $y(t) = 0$".
- ☐ Die Phase $\phi(t) = -\pi/2$ bedeutet auch „Realteil $x(t) = 0$".

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Momentanleistung $p(t) > 4$?

Pr($p(t)$ > 4) =

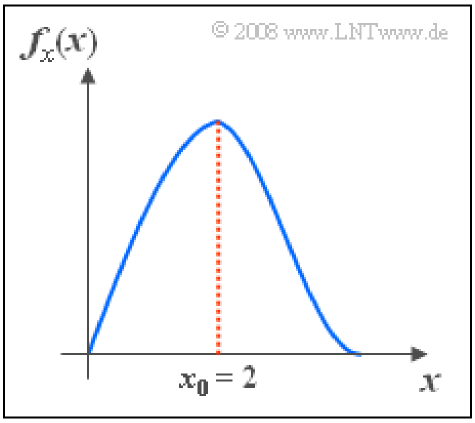
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag $a(t)$ größer als 2 ist?

Pr($a(t)$ > 2) =

d) Berechnen Sie – ausgehend von $f_p(p)$ – die WDF der Zufallsgröße a. Welcher WDF-Wert ergibt sich für $a = 1$?

$f_a(a = 1)$ =

Z3.10: Rayleigh oder Rice?



Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsgröße x ist wie folgt gegeben:

$$f_x(x) = \frac{x}{\lambda^2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/(2\lambda^2)}.$$

Entsprechend gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion:

$$F_x(r) = \Pr(x \le r) = 1 - \mathrm{e}^{-r^2/(2\lambda^2)}.$$

Bekannt ist, dass der Wert $x_0 = 2$ am häufigsten auftritt. Das bedeutet auch, dass die WDF $f_x(x)$ bei $x = x_0$ maximal ist.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 3.7.** Berücksichtigen Sie bei der Lösung das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/2}.$$

Sie können Ihre Ergebnisse mit nachfolgendem Berechnungstool überprüfen:

WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen

Fragebogen zu "Z3.10: Rayleigh oder Rice?"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- [ ] Es handelt sich um eine riceverteilte Zufallsgröße.
- [ ] Es handelt sich um eine rayleighverteilte Zufallsgröße.
- [ ] Das Zentralmoment 3. Ordnung (μ_3) ist 0.
- [ ] Die Kurtosis hat den Wert $K_x = 3$.

b) Welchen Zahlenwert hat hier der Verteilungsparameter λ?

$\boldsymbol{\lambda}$ =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x kleiner als x_0 ist?

Pr($\boldsymbol{x < x_0}$) =

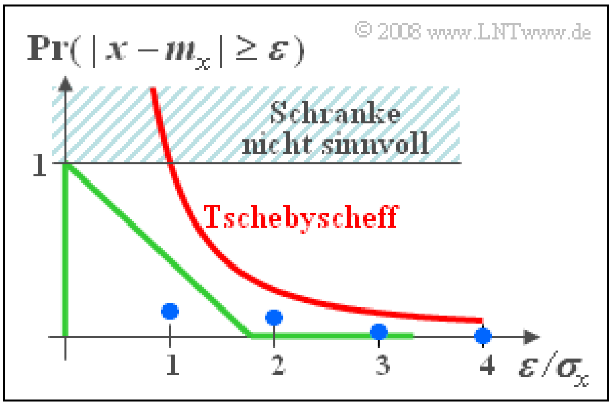
d) Wie groß ist der Mittelwert der Zufallsgröße x? Interpretation.

$\boldsymbol{m_x}$ =

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist x größer als sein Mittelwert m_x?

Pr ($\boldsymbol{x > m_x}$) =

A3.11: Tschebyscheff



Ist über eine Zufallsgröße x nichts weiter bekannt als nur der Mittelwert m_x und die Streuung σ_x, so gibt die *Tschebyscheffsche Ungleichung* eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass x betragsmäßig mehr als einen Wert ε von seinem Mittelwert m_x abweicht:

$$\mathrm{Pr}(|x - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}.$$

In der Grafik ist diese obere Schranke rot eingezeichnet. Der grüne Kurvenverlauf zeigt die tatsächliche Wahrscheinlichkeit bei der Gleichverteilung, die blauen Punkte gelten für die Exponentialverteilung. Aus dieser Darstellung ist zu erkennen, dass die *Tschebyscheffsche Ungleichung* nur eine sehr grobe Schranke darstellt. Sie sollte nur dann verwendet werden, wenn von der Zufallsgröße wirklich nur der Mittelwert und die Streuung bekannt sind.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Tschebyscheffsche Ungleichung** im Kapitel 3.7.

Nachfolgend finden Sie eine Tabelle mit Werten der komplementären Gaußschen Fehlerfunktion.

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$Q(x)$	0.5000	0.1587	0.0227	$0.13 \cdot 10^{-2}$	$0.32 \cdot 10^{-4}$

Fragebogen zu "A3.11: Tschebyscheff"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Vorstellbar ist eine Zufallsgröße mit $\Pr(|x - m_x| \geq 3\sigma_x) = 1/4$.
- [ ] „Tschebyscheff" liefert für $\varepsilon < \sigma_x$ keine Information.
- [ ] $\Pr(|x - m_x| \geq \varepsilon)$ ist für große ε identisch 0, wenn x begrenzt ist.

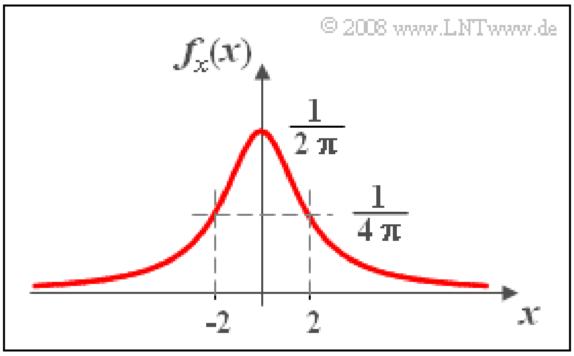
b) Geben Sie die Überschreitungswahrscheinlichkeit $p_k = \Pr(|x - m_x| \geq k \cdot \sigma_x)$ für die Gaußverteilung an (mit k = 1, 2, 3, 4). Wie groß ist p_3?

Gauß: $\mathbf{Pr(|x - m_x| \geq 3\sigma_x)}$ =

c) Wie lauten diese Überschreitungswahrscheinlichkeiten p_k (k = 1, 2, 3, 4) bei der Exponentialverteilung. Hier gilt: $m_x = \sigma_x = 1/\lambda$. Wie groß ist p_3?

Exponential: $\mathbf{Pr(|x - m_x| \geq 3\sigma_x)}$ =

A3.12: Cauchyverteilung



Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sei wie folgt gegeben ⇒ Cauchyverteilung:

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x/2)^2}.$$

Aus der Grafik ist der extrem langsame Abfall des WDF–Verlaufs zu erkennen.

Hinweis: Die theoretischen Hintergründe zur Aufgabe finden Sie auf der Seite **Cauchyverteilung** im Kapitel 3.7.

Fragebogen zu "A3.12: Cauchyverteilung"

a) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_x(r)$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist x betragsmäßig kleiner als 2?

Pr (|*x*| < 2) =

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist x betragsmäßig größer als 4?

Pr (|*x*| > 4) =

c) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen für die Cauchyverteilung zu?

- ☐ Die Cauchyverteilung besitzt eine unendlich große Varianz.
- ☐ Die Tschebyscheff-Ungleichung macht hier keinen Sinn.
- ☐ Eine in der Natur messbare Zufallsgröße ist nie cauchyverteilt.