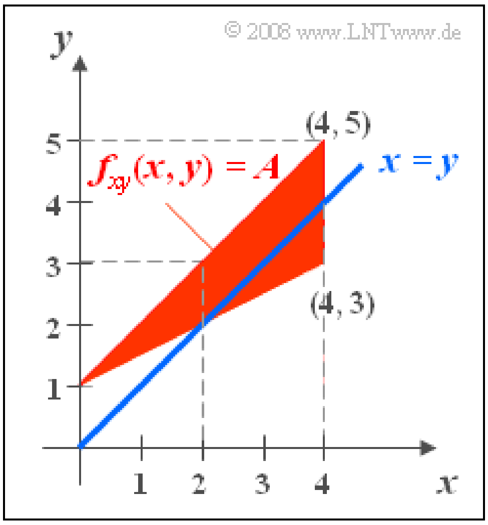
A4.1: Dreieckiges (x, y)-Gebiet



Eine 2D-Zufallsgröße ist durch die nebenstehende Skizze definiert. Für (x, y) können nur Werte innerhalb des durch die drei Eckpunkte (0, 1), (4, 3) und (4, 5) festgelegten dreieckförmigen Gebietes auftreten. Innerhalb des Dreiecks sind alle Zufallsgrößen (x, y) gleichwahrscheinlich. Für die 2D–WDF gilt somit:

$$f_{xy}(x, y) = A.$$

Zusätzlich ist die Gerade $x = y$ ⇒ „Winkelhalbierende" in obiger Skizze eingezeichnet (siehe Teilaufgabe b).

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.1: Dreieckiges (x, y)-Gebiet"

a) Bestimmen Sie die WDF–Konstante anhand geometrischer Überlegungen.

$\boldsymbol{A}$ =

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass x größer als y ist.

Pr($x > y$) =

c) Ermitteln Sie die Rand-WDF $f_x(x)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass x größer/gleich 2 ist. Überprüfen Sie den Wert anhand der 2D–WDF.

Pr($x \ge 2$) =

d) Ermitteln Sie die Rand-WDF $f_y(y)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass y größer/gleich 3 ist. Überprüfen Sie den Wert anhand der 2D–WDF.

Pr($y \ge 3$) =

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße x größer oder gleich 2 und gleichzeitig die Zufallsgröße y größer oder gleich 3 ist?

Pr(($x \ge 2$) ∩ ($y \ge 3$)) =

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x größer oder gleich 2 ist, unter der Bedingung, dass $y \ge 3$ gilt?

Pr($x \ge 2 \mid y \ge 3$) =

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass y größer oder gleich 3 ist, unter der Bedingung, dass $x \ge 2$ gilt?

Pr($y \ge 3 \mid$ x ≥ 2) =

Z4.1: Verabredung zum Frühstück

Frau M. und Herr S. treffen sich ja bekanntlich öfter einmal zu einem gemeinsamen Frühstück. Beide versprechen, an einem bestimmten Tag zwischen 8 Uhr und 9 Uhr zu einem solchen Treffen zu kommen. Weiter vereinbaren sie, dass jeder von ihnen in diesem Zeitraum (und nur in diesem) auf „Gut Glück" eintrifft und bis zu einer Viertelstunde auf den Anderen wartet.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1.** Verwenden Sie bei den nachfolgenden Fragen als Zeitangabe die Minute der Ankunftszeit: „Minute = 0" steht für 8 Uhr, „Minute = 60" für 9 Uhr.

Die Aufgabe entstand vor der Bundestagswahl 2002, als sowohl Angela Merkel als auch Edmund Stoiber Kanzlerkandidat(in) der CDU/CSU werden wollten. Bei einem **gemeinsamen Frühstück in Wolfratshausen** verzichtete Frau Merkel. Die spätere Wahl gewann Gerhard Schröder.

Fragebogen zu "Z4.1: Verabredung zum Frühstück"

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_{\rm a}$, dass sich die beiden treffen, wenn Herr S. um 8 Uhr 30 ankommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

$p_{\rm a}$ =

b) Welche Ankunftszeit sollte Frau M. wählen, wenn sie Herrn S. eigentlich nicht treffen möchte, sich aber trotzdem an die getroffene Vereinbarung halten will? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit $p_{\rm b}$, dass sich Frau M. und Herr S. treffen werden?

$p_{\rm b}$ =

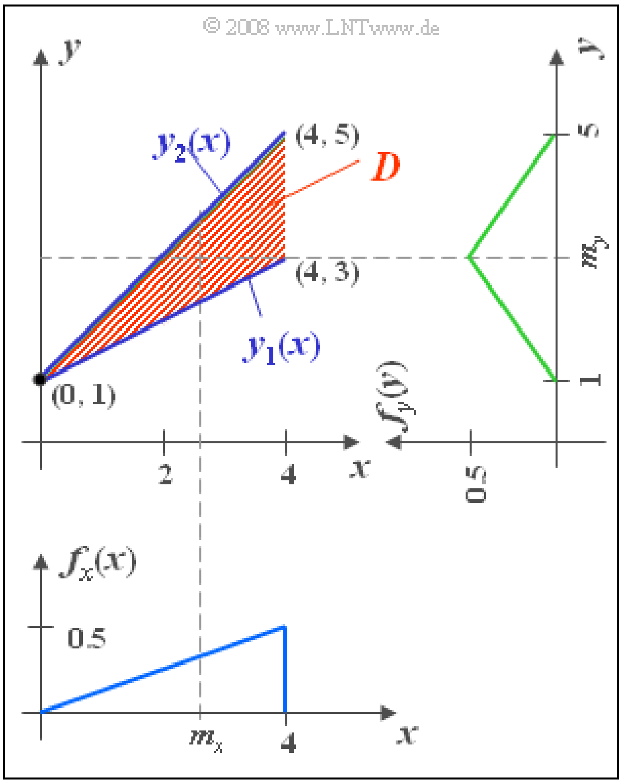
c) Welche Ankunftszeit sollte Frau M. wählen, wenn sie nicht nur ein Treffen möglichst vermeiden, sondern die Wartezeit minimieren möchte?
Hinweis: Minute = 0 steht für 8 Uhr, Minute = 60 für 9 Uhr.

Minute =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_{\rm d}$ für ein Zusammentreffen generell, das heißt, wenn beide tatsächlich auf „Gut Glück" erscheinen?

$p_{\rm d}$ =

A4.2: Wieder Dreieckgebiet



Wir betrachten die gleiche Zufallsgröße (x, y) wie in Aufgabe A4.1. In einem durch die Eckpunkte (0,1), (4,3) und (4,5) definierten dreieckförmigen Gebiet D sei die 2D–WDF $f_{xy}(x, y) = 0.25$. Außerhalb dieses Definitionsgebietes D (in der Grafik rot markiert) gibt es keine Werte.

Weiterhin sind im nebenstehenden Bild die beiden Randwahrscheinlichkeitsdichten bezüglich den Größen x und y eingezeichnet, die bereits in der Aufgabe A4.1 ermittelt wurden. Daraus lassen sich mit den Gleichungen von **Kapitel 3.3** die Kenngrößen der beiden Zufallsgrößen bestimmen:

$$m_x = 8/3, \qquad \sigma_x = \sqrt{8/9},$$

$$m_y = 3, \qquad \sigma_y = \sqrt{2/3}.$$

Aufgrund der Tatsache, dass das Definitionsgebiet D durch zwei Gerade $y_1(x)$ und $y_2(x)$ begrenzt ist, kann hier das gemeinsame Moment erster Ordnung wie folgt berechnet werden.

$$m_{xy} = \mathrm{E}[x \cdot y] = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y \cdot f_{xy}(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Inhalt von **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.2: Wieder Dreieckgebiet"

a) Wie lauten die Grenzgeraden des inneren Integrals zur m_{xy}-Berechnung?

- $y_1(x) = x + 1; \quad y_2(x) = 2x + 1.$
- $y_1(x) = x/2 + 1; \quad y_2(x) = x + 1.$
- $y_1(x) = x - 1; \quad y_2(x) = 2x + 1.$

b) Berechnen Sie das gemeinsame Moment m_{xy} gemäß dem Doppelintegral auf der Angabenseite. *Hinweis*: Setzen Sie $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

$\boldsymbol{m_{xy}}$ =

c) Welcher Wert ergibt sich für die Kovarianz?

$\boldsymbol{\mu_{xy}}$ =

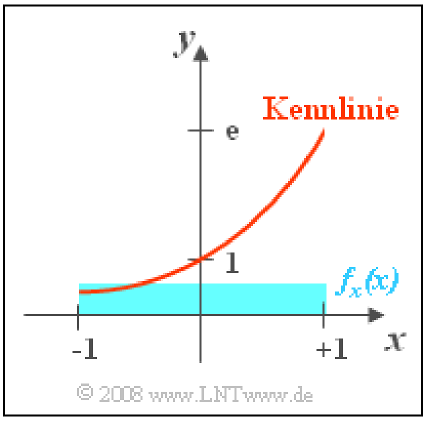
d) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient?

$\boldsymbol{\rho_{xy}}$ =

e) Wie lautet die Gleichung der Korrelationsgeraden $y = K(x)$? An welcher Stelle y_0 schneidet die Gerade die y-Achse? Zeigen Sie, dass die Korrelationsgerade auch durch den Punkt (m_x, m_y) geht.

$\boldsymbol{y_0}$ =

Z4.2: Korrelation zwischen x und e^x



Die Zufallsgröße x sei gleichverteilt zwischen –1 und +1. Damit ist der Mittelwert $m_x = 0$ und die Varianz $\sigma_x^2 = 1/3$.

Durch eine nichtlineare Kennlinie wird die Zufallsgröße $y = g(x) = e^x$ gebildet. Zwischen den beiden Zufallsgrößen x und y besteht also ein fester, deterministischer Zusammenhang und die Zufallsgröße y kann nur Werte zwischen 1/e und e annehmen.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erhält man für diesen Bereich nach dem Prinzip „Transformation von Zufallsgrößen":

$$f_y(y) = \frac{1}{2y}.$$

Berücksichtigen Sie, dass im betrachteten Bereich von $-1 \le x \le +1$ die Exponentialfunktion wie folgt angenähert werden kann:

$$y = e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.3** und das **Kapitel 4.1** des Theorieteils.

Fragebogen zu "Z4.2: Korrelation zwischen x und e^x"

a) Wie groß ist der Mittelwert der Zufallsgröße y?

m_y =

b) Berechnen Sie die Streuung der Zufallsgröße y.

σ_y =

c) Welche der folgenden Aussagen gelten hinsichtlich der 2D-WDF $f_{xy}(x, y)$?

- ☐ Außerhalb der Kurve $y = e^x$ ist $f_{xy}(x, y) = 0$.
- ☐ Für alle Werte (x, e^x) ist die WDF konstant.
- ☐ Die WDF beschreibt eine Diracwand entlang der Kurve $y = e^x$.
- ☐ Die Dirachöhe nimmt von links unten nach rechts oben ab.

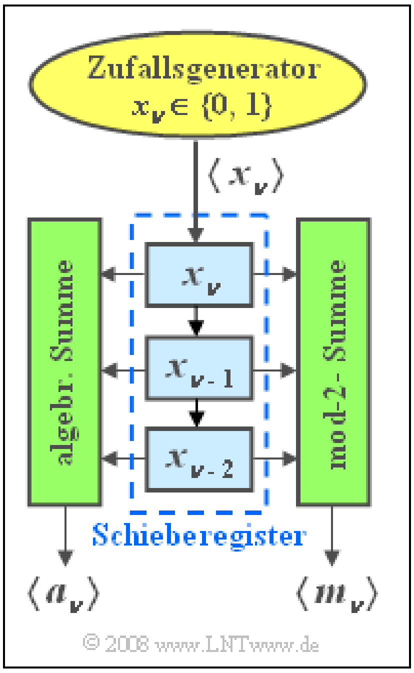
d) Berechnen Sie das gemeinsame Moment der Zufallsgrößen x und y, also den Erwartungswert des Produkts $x \cdot y$.

m_{xy} =

e) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen den Zufallsgrößen x und y. Interpretieren Sie das Ergebnis.

ρ_{xy} =

A4.3: Algebraische und Modulo-Summe



Ein „getakteter" Zufallsgenerator liefert eine Folge $\langle x_\nu \rangle$ von binären Zufallszahlen. Es wird nun vorausgesetzt, dass die Binärzahlen 0 und 1 mit gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten und dass die einzelnen Zufallszahlen nicht statistisch voneinander abhängen. Die Zufallszahlen $x_\nu \in \{0, 1\}$ werden in die erste Speicherstelle eines Schieberegisters eingetragen und mit jeden Takt um eine Stelle nach unten verschoben.

Aus den Inhalten des dreistelligen Schieberegisters werden zwei neue Zufallsfolgen $\langle a_\nu \rangle$ und $\langle m_\nu \rangle$ gebildet. Hierbei bezeichnet:

- a_ν die *algebraische Summe*:

  $$a_\nu = x_\nu + x_{\nu-1} + x_{\nu-2},$$

- m_ν die *Modulo–2-Summe*:

  $$m_\nu = x_\nu \oplus x_{\nu-1} \oplus x_{\nu-2}.$$

Dieser Sachverhalt ist in der nachfolgenden Tabelle nochmals dargestellt:

x_ν	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_{\nu-1}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_{\nu-2}$	0	1	0	1	0	1	0	1
a_ν	0	1	1	2	1	2	2	3
m_ν	0	1	1	0	1	0	0	1

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Inhalt von **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.3: Algebraische und Modulo-Summe"

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $m_ν$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Modulo-2-Summe gleich 0 ist?

Pr($m_ν$ = 0) =

b) Bestehen statistiche Abhängigkeiten innerhalb der Folge $\langle m_ν \rangle$?

- ○ Die Folgenelemente $m_ν$ sind statistisch unabhängig.
- ○ Es bestehen statistische Bindungen innerhalb der Folgen $\langle m_ν \rangle$.

c) Ermitteln Sie die Verbund-WDF $f_{xm}(x_ν,\ m_ν)$ und bewerten Sie aufgrund des Resultats die nachfolgenden Aussagen (zutreffend oder nicht).

- ☐ Die Zufallsgröße $x_ν$ und $m_ν$ sind statistisch abhängig.
- ☐ Die Zufallsgröße $x_ν$ und $m_ν$ sind statistisch unabhängig.
- ☐ Die Zufallsgröße $x_ν$ und $m_ν$ sind korreliert.
- ☐ Die Zufallsgröße $x_ν$ und $m_ν$ sind unkorreliert.

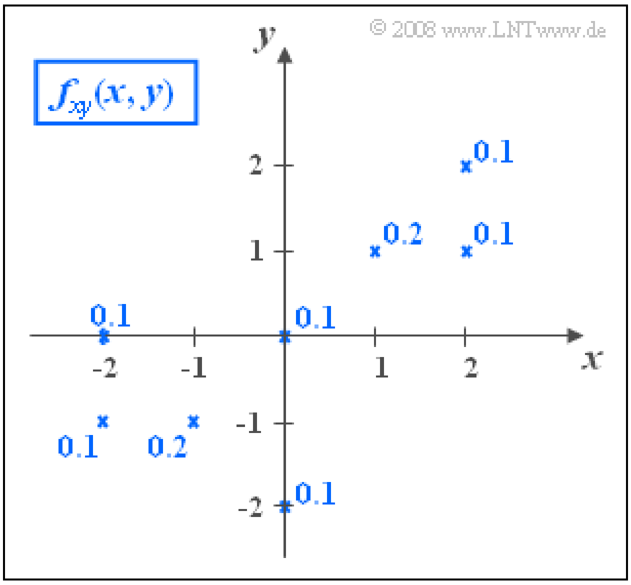
d) Bestehen innerhalb der Folge $\langle a_ν \rangle$ statistische Abhängigkeiten?

- ○ Die Folgenelemente $a_ν$ sind statistisch unabhängig.
- ○ Es bestehen statistische Bindungen innerhalb der Folgen $\langle a_ν \rangle$.

e) Ermitteln Sie die 2D-WDF $f_{am}(a_ν,\ m_ν)$ und den Korrelationskoeffizienten $ρ_{am}$. Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Die Zufallsgröße $a_ν$ und $m_ν$ sind statistisch abhängig.
- ☐ Die Zufallsgröße $a_ν$ und $m_ν$ sind statistisch unabhängig.
- ☐ Die Zufallsgröße $a_ν$ und $m_ν$ sind korreliert.
- ☐ Die Zufallsgröße $a_ν$ und $m_ν$ sind unkorreliert.

Z4.3: Diracförmige 2D-WDF



In der Grafik rechts ist die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{xy}(x,\ y)$ der zwei diskreten Zufallsgrößen x und y dargestellt. Diese 2D–WDF besteht aus acht Diracpunkten, durch Kreuze markiert. Die Zahlenwerte geben die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.

Es ist zu erkennen, dass sowohl x als auch y alle ganzzahligen Werte zwischen den Grenzen –2 und +2 annehmen können.

Die Varianzen der beiden Zufallsgrößen sind wie folgt gegeben: $\sigma_x^{\ 2} = 2$ und $\sigma_y^{\ 2} = 1.4$.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Thematik von **Kapitel 2.2** und **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "Z4.3: Diracförmige 2D-WDF"

a) Welche der folgenden Aussagen trefen hinsichtlich der Zufallsgröße x zu?

- ☐ Die Wahrscheinlichkeiten für –2, –1, 0, +1 und +2 sind gleich.
- ☐ Die Zufallsgröße x ist mittelwertfrei ($m_x = 0$).
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(x \le 1)$ ist 0.9.

b) Welche der folgenden Aussagen treffen hinsichtlich der Zufallsgröße y zu?

- ☐ Die Wahrscheinlichkeiten für –2, –1, 0, +1 und +2 sind gleich.
- ☐ Die Zufallsgröße y ist mittelwertfrei ($m_y = 0$).
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(y \le 1)$ ist 0.9.

c) Berechnen Sie den Wert der zweidimensionalen VTF an der Stelle (1, 1).

$\boldsymbol{F_{xy}(1, 1)}$ =

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $x \le 1$ gilt, unter der Bedingung, dass gleichzeitig $y \le 1$ ist.

$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{x \le 1 \,|\, y \le 1})$ =

e) Berechnen Sie das gemeinsame Moment der Zufallsgrößen x und y.

$\boldsymbol{m_{xy}}$ =

f) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} und geben Sie die Gleichung der Korrelationsgeraden $K(x)$ an. Wie groß ist deren Winkel zur x-Achse?

$\boldsymbol{\Theta_{y\rightarrow x}}$ = Grad

g) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Die Zufallsgrößen x und y sind statistisch unabhängig.
- ☐ Man erkennt bereits aus der vorgegebenen 2D-WDF, dass x und y statistisch voneinander abhängen.
- ☐ Aus dem berechneten Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} kann man auf die statistische Abhängigkeit zwischen x und y schließen.

A4.4: Gaußsche 2D-WDF

Wir betrachten zweidimensionale Zufallsgrößen, wobei beide Komponenten stets als mittelwertfrei vorausgesetzt werden. Die 2D-WDF der Zufallsgröße (u, v) lautet:

$$f_{uv}(u,v) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-(2u^2 + v^2/2)}.$$

Von der ebenfalls Gaußschen 2D-Zufallsgröße (x, y) sind die folgenden Parameter bekannt:

$$\sigma_x = 0.5, \quad \sigma_y = 1, \quad \rho_{xy} = 1.$$

Die Werte des Gaußschen Fehlerintegrals $\phi(x)$ sowie der Komplementärfunktion $\mathrm{Q}(x) = \phi(-x) = 1 - \phi(x)$ können Sie der nebenstehenden Tabelle entnehmen.

x	$\phi(x)$	$\mathrm{Q}(x)$
0	0.5000	0.5000
0.2	0.5793	0.4207
0.4	0.6554	0.3446
0.6	0.7257	0.2743
0.8	0.7881	0.2119
1.0	0.8413	0.1587
1.2	0.8849	0.1151
1.4	0.9192	0.0808
1.6	0.9452	0.0548
1.8	0.9641	0.0359
2.0	0.9772	0.0228
2.2	0.9861	0.0139
2.4	0.9918	0.0082
2.6	0.9953	0.0047
2.8	0.9974	0.0026
3.0	0.9987	0.0013

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 3.5** und **Kapitel 4.2.** Die hier behandelte Thematik ist in zwei Lernvideos zusammengefasst:
Gaußsche Zufallsgrößen ohne statistische Bindungen (Dauer 2:35)
Gaußsche Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen (Dauer 3:15)

Fragebogen zu "A4.4: Gaußsche 2D-WDF"

a) Welche der Aussagen gelten hinsichtlich der Zufallsgröße (u, v)?

- [ ] Die Zufallsgrößen u und v sind unkorreliert.
- [ ] Die Zufallsgrößen u und v sind statistisch unabhängig.

b) Berechnen Sie die beiden Streuungen σ_u und σ_v. Geben Sie zur Kontrolle den Quotienten der beiden Streuungen ein.

$\boldsymbol{\sigma_u / \sigma_v}$ =

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass u kleiner als 1 ist.

Pr(u < 1) =

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße u kleiner als 1 und gleichzeitig die Zufallsgröße v größer als 1 ist.

Pr((u < 1) ∩ (v > 1)) =

e) Welche der Aussagen sind für die 2D-Zufallsgröße (x, y) zutreffend?

- [ ] Die 2D-WDF $f_{xy}(x, y)$ ist außerhalb der Geraden $y = 2x$ stets 0.
- [ ] Für alle Wertepaare auf der Geraden $y = 2x$ gilt $f_{xy}(x, y) = 0.5$.
- [ ] Bezüglich der Rand-WDF gilt $f_x(x) = f_u(u)$ bzw. $f_y(y) = f_v(v)$.

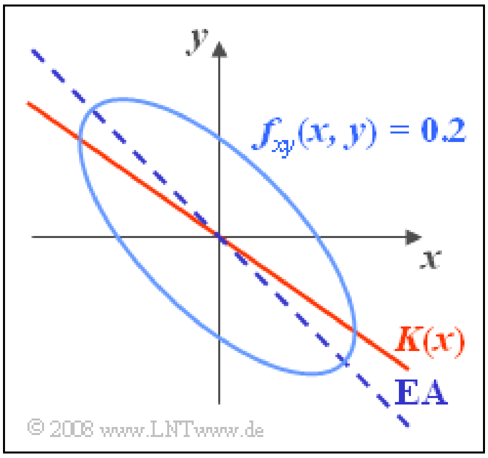
f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass x kleiner als 1 ist.

Pr(x < 1) =

g) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße x kleiner als 1 und gleichzeitig y größer als 1 ist.

Pr((x < 1) ∩ (y > 1)) =

Z4.4: Höhenlinien der 2D-WDF



Gegeben ist eine zweidimensionale Gaußsche Zufallsgröße (x, y) mit dem Mittelwert (0, 0) und der 2D–WDF

$$f_{xy}(x, y) = C \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+\sqrt{2}\cdot x\cdot y)}.$$

Bekannt ist weiterhin, dass die beiden Streuungen σ_x und σ_y jeweils gleich 1 sind. In der Skizze eingetragen sind:

- eine Höhenlinie dieser WDF für $f_{xy}(x, y) = 0.2$,
- die Ellipsenhauptachse (EA), und
- die Korrelationsgerade $y = K(x)$.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Inhalt von **Kapitel 4.2.** Die hier behandelte Thematik ist zudem in zwei Lernvideos zusammengefasst:

Gaußsche Zufallsgrößen ohne statistische Bindungen (Dauer 2:35)

Gaußsche Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen (Dauer 3:15)

Fragebogen zu "Z4.4: Höhenlinien der 2D-WDF"

a) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient?

ρ_{xy} =

b) Wie groß ist der Maximalwert $C = f_{xy}(0, 0)$ der WDF?

C =

c) Wie groß ist der Winkel zwischen Ellipsenhauptachse (EA) und x-Achse?

α = Grad

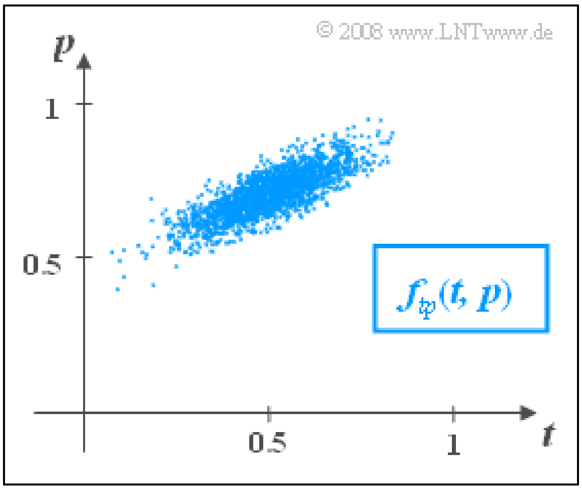
d) Bei welchen Werten x_0 bzw. y_0 schneidet die Höhenlinie $f_{xy}(x, y) = 0.2$ die Ellipsenhauptachse? Welcher Zusammenhang besteht zwischen x_0 und y_0?

x_0/y_0 =

e) Welche Aussagen treffen hinsichtlich der Korrelationsgeraden $K(x)$ zu?

- ☐ Die Korrelationsgerade ist steiler als die Ellipsenhauptachse.
- ☐ Der Winkel von $K(x)$ gegenüber der x-Achse ist etwa –35°.
- ☐ Die Korrelationsgerade schneidet alle Höhenlinien dort, wo an die Ellipse eine vertikale Tangente angelegt werden kann.

A4.5: 2D-Prüfungsauswertung



In einer Studie wurden die Meisterprüfungen für das Handwerk untersucht, die sich stets aus einem theoretischen und zusätzlich einem praktischen Teil zusammensetzen. Im Bild bezeichnet

- t die Punktzahl in der theoretischen Prüfung,
- p die Punktzahl in der praktischen Prüfung.

Beide Zufallsgrößen (t und p) sind dabei jeweils auf die Maximalpunktezahlen normiert und können deshalb nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Beide Zufallsgrößen sind zudem als kontinuierliche Zufallsgrößen zu interpretieren, das heißt: t und p sind nicht auf diskrete Zahlenwerte beschränkt.

Die Grafik zeigt die WDF $f_{tp}(t, p)$ der zweidimensionalen Zufallsgröße (t, p), die nach der Auswertung von insgesamt N = 10000 Abschlussarbeiten veröffentlicht wurde. Diese Funktion wurde mit Hilfe eines Auswertungsprogramms empirisch wie folgt angenähert:

$$f_{tp}(t,p) = 13.263 \cdot \exp\left\{ -\frac{(t-0.5)^2}{0.0288} - \frac{(p-0.7)^2}{0.0072} + \frac{(t-0.5)(p-0.7)}{0.0090} \right\}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Inhalt von **Kapitel 4.2.** Die hier behandelte Thematik ist in zwei Lernvideos zusammengefasst:
Gaußsche Zufallsgrößen ohne statistische Bindungen (Dauer 2:35)
Gaußsche Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen (Dauer 3:15)

Fragebogen zu "A4.5: 2D-Prüfungsauswertung"

a) Wie groß ist der Mittelwert der im Theorieteil erzielten Ergebnisse?

m_t =

b) Wie groß ist der Mittelwert der im Praxisteilteil erzielten Ergebnisse? Geben Sie auch die WDF der mittelwertfreien Zufallsgröße (t', p') an.

m_p =

c) Berechnen Sie die Streuungen (Standardabweichungen) σ_t und σ_p sowie den Korrelationskoeffizienten ρ zwischen den beiden Größen an.

σ_t =

σ_p =

ρ =

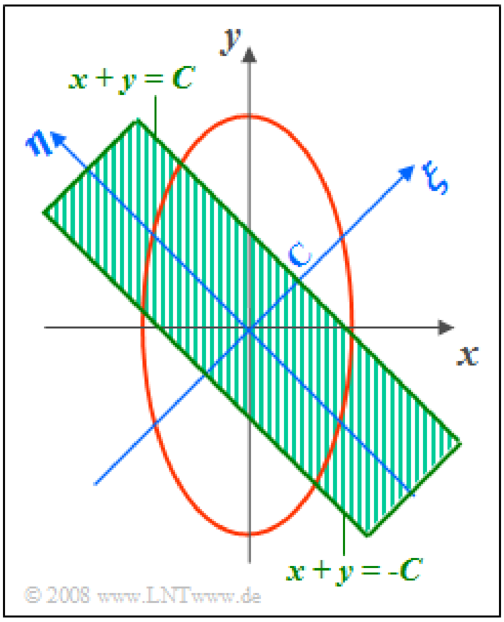
d) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Der Gauß-Ansatz ist für dieses Problem nur eine Näherung.
- [ ] War ein Prüfling im Theoretieteil überdurchschnittlich gut, so ist zu erwarten, dass er in der Praxis eher schlecht ist.

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Teilnehmer in der Theorie– und der Praxis–Prüfung jeweils zwischen 49% und 51% der Punkte erreicht?

$\mathrm{Pr}[(0.49 \le t \le 0.51) \cap (0.49 \le p \le 0.51)]$ =

A4.6: Koordinatendrehung



Wir betrachten in der Aufgabe eine zweidimensionale Gaußsche Zufallsgröße (x, y) mit statistisch unabhängigen Komponenten. Die Streuungen sind $\sigma_x = 1$ und $\sigma_y = 2$.

Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweidimensionale Zufallsgröße (x, y) innerhalb des grün schraffiert eingezeichneten Bereichs liegt:

$$-C \le x + y \le C.$$

Führen Sie zur Lösung eine Koordinatentransformation durch:

$$\xi = \quad x + y,$$
$$\eta = -x + y.$$

Dies entspricht einer Drehung des Koordinatensystems um 45°. Aus $x + y = \pm C$ folgt damit $\xi = \pm C$. Die beiden zweidimensionalen Dichtefunktionen lauten dann:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot \exp\left[-(x^2/2 + y^2/8)\right],$$

$$f_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{1 - \rho_{\xi\eta}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho_{\xi\eta}^2)} \cdot \left(\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} - 2\rho_{\xi\eta} \cdot \frac{\xi \cdot \eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}\right)\right].$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 4.2.** Gegeben sind die Näherungen Q(2.3) ≈ 0.01 und Q(2.6) ≈ 0.005 für das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral.

Nachfolgend gibt es Hyperlinks zu zwei Lernvideos, die diese Thematik behandeln:
Gaußsche Zufallsgrößen ohne statistische Bindungen (Dauer 2:35)
Gaußsche Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen (Dauer 3:15)

Fragebogen zu "A4.6: Koordinatendrehung"

a) Ermitteln Sie durch Koeffizientenvergleich das Verhältnis der beiden Streuungen der neuen Zufallsgröße (ξ, η).

σ_ξ/σ_η =

b) Berechnen Sie die Streuung σ_ξ und den Korrelationskoeffizienten $\rho_{\xi\eta}$ zwischen den neuen Zufallsgrößen ξ und η.

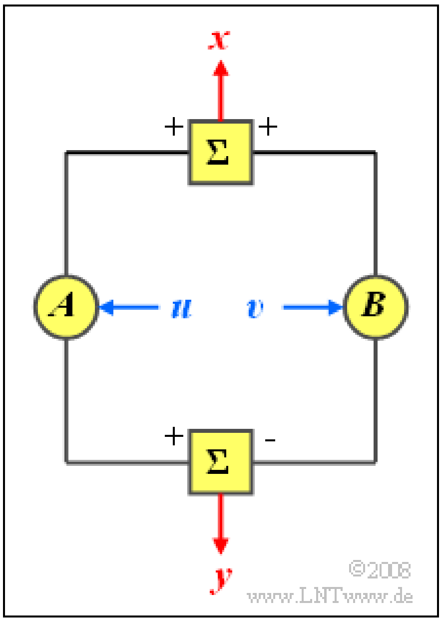
σ_ξ =

$\rho_{\xi\eta}$ =

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das $|x + y| \le C$ gilt. Wie groß muss man C wählen, damit 99% aller Größen im schraffierten Bereich liegen?

C =

A4.7: Gewichtete Summe und Differenz



Die Zufallsgrößen u und v seien statistisch voneinander unabhängig, jeweils mit Mittelwert m und Varianz σ^2. Beide Größen besitzen gleiche WDF und VTF; über den Verlauf dieser Funktionen sei zunächst nichts bekannt.

Es werden nun zwei neue Zufallsgrößen x und y entsprechend den nachfolgenden Gleichungen gebildet:

$$x = A \cdot u + B \cdot v,$$

$$y = A \cdot u - B \cdot v.$$

Hierbei bezeichnen A und B (beliebige) konstante Werte. Für die Teilaufgaben (a) bis (d) gelte $m = 0$, $\sigma = 1$, $A = 1$ und $B = 2$.

Bei der Teilaufgabe (f) wird vorausgesetzt, dass u und v jeweils gaußverteilt mit Mittelwert $m = 1$ und Streuung $\sigma = 0.5$ seien. Für die Konstanten gelte $A = B = 1$.

Für die Aufgabe (g) seien die Zufallsgrößen u und v symmetrisch zweipunktverteilt auf ± 1:

$$\Pr(u = 1) = \Pr(u = -1) = \Pr(v = 1) = \Pr(v = -1) = 0.5.$$

Außerdem gelte weiterhin $A = B = 1$.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "A4.7: Gewichtete Summe und Differenz"

a) Wie groß sind Mittelwert und Streuung von x für A = 1 und B = 2?

$\boldsymbol{m_x}$ =

$\boldsymbol{\sigma_x}$ =

b) Wie groß sind Mittelwert und Streuung von y für A = 1 und B = 2?

$\boldsymbol{m_y}$ =

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

c) Berechnen Sie die Kovarianz. Welcher Wert ergibt sich für A = 1, B = 2?

$\boldsymbol{\mu_{xy}}$ =

d) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} in Abhängigkeit des Quotienten B/A. Welcher Koeffizient ergibt sich für A = 1 und B = 2?

$\boldsymbol{\rho_{xy}}$ =

e) Welche der folgenden Aussagen gelten immer?

- [ ] Für B = 0 sind die Zufallsgrößen x und y streng korreliert.
- [ ] Es gilt $\rho_{xy}(-B/A) = -\rho_{xy}(B/A)$.
- [ ] Im Grenzfall $B/A \rightarrow \infty$ sind x und y streng korreliert.
- [ ] Für $A = B$ sind die Zufallsgrößen x und y unkorreliert.

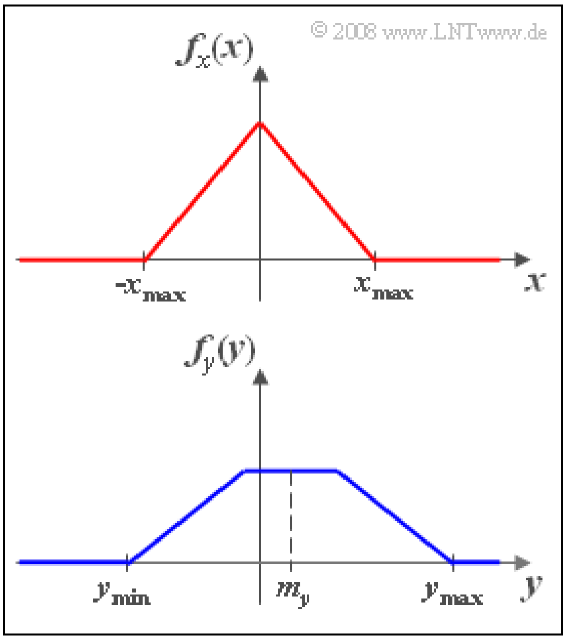
f) Welche Aussagen sind zutreffend, wenn $A = B = 1$ gilt und u und v jeweils gaußverteilt sind mit Mittelwert m = 1 und Streuung σ = 0.5?

- [ ] Die Zufallsgrößen x und y sind unkorreliert.
- [ ] Die Zufallsgrößen x und y sind statistisch unabhängig.

g) Welche Aussagen treffen zu, wenn u und v symmetrisch zweipunktverteilt sind und $A = B = 1$ gilt?

- [ ] Die Zufallsgrößen x und y sind unkorreliert.
- [ ] Die Zufallsgrößen x und y sind statistisch unabhängig.

Z4.7: Erzeugung einer 2D–WDF



Ausgehend von statistisch unabhängigen Größen u und v, die beide zwischen –1 und +1 gleichverteilt sind und somit jeweils die Varianz σ^2 = 2/3 besitzen, soll eine 2D-Zufallsgröße (x, y) generiert werden, wobei für die Komponenten gilt:

$$x = A \cdot u + B \cdot v + C,$$

$$y = D \cdot u + E \cdot v + F.$$

Die zu erzeugende 2D–Zufallsgröße (x, y) soll die folgenden statistischen Eigenschaften aufweisen:

- Die Varianzen seien $\sigma_x^2 = 4$ und $\sigma_y^2 = 10$.
- Die Zufallsgröße x sei mittelwertfrei.
- Für den Mittelwert von y gelte $m_y = 1$.
- Der Korrelationskoeffizient zwischen x und y betrage

  $$\rho_{xy} = \sqrt{0.9} = 0.949.$$
- Die Zufallsgröße x besitze eine dreieckförmige WDF $f_x(x)$ entsprechend der oberen Grafik.
- Die Zufallsgröße y besitze eine trapezförmige WDF $f_y(y)$ entsprechend der unteren Grafik.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.3.** Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden wird festgelegt, dass alle Koeffizienten A … F nicht negativ sein sollen.

Fragebogen zu "Z4.7: Erzeugung einer 2D–WDF"

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten C und F.

$\boldsymbol{C}$ =

$\boldsymbol{F}$ =

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B.

$\boldsymbol{A}$ =

$\boldsymbol{B}$ =

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten D und E, wobei $D > E$ gelten soll.

$\boldsymbol{D}$ =

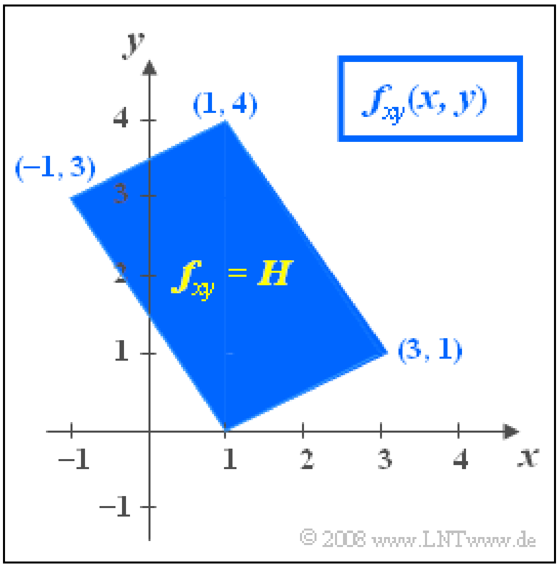
$\boldsymbol{E}$ =

d) Geben Sie die Maximalwerte für x und y an.

$\boldsymbol{x_{\rm max}}$ =

$\boldsymbol{y_{\rm max}}$ =

A4.8: Rautenförmige 2D-WDF



Wir betrachten eine 2D–Zufallsgröße (x, y), deren Komponenten sich jeweils als Linearkombinationen zweier Zufallsgrößen u und v ergeben:

$$x = 2u - 2v + 1,$$

$$y = u + 3v.$$

Die beiden statistisch unabhängigen Zufallsgrößen u und v sind jeweils gleichverteilt zwischen 0 und 1.

In der Abbildung sehen Sie die 2D–WDF. Innerhalb des blau eingezeichneten Parallelogramms gilt:

$$f_{xy}(x, y) = H.$$

Außerhalb sind keine Werte möglich.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.3,** insbesondere auf die Seite **Korrelationsgerade.** Gehen Sie – wenn möglich – von den zwei angegebenen Gleichungen aus und nutzen Sie die Informationen der obigen Skizze vorwiegend nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse.

Fragebogen zu "A4.8: Rautenförmige 2D-WDF"

a) Wie groß ist die Höhe H der 2D–WDF innerhalb des Parallelogramms?

$\boldsymbol{H}$ =

b) Welche Werte von u und v liegen dem Eckpunkt (–1, 3) zugrunde?

$\boldsymbol{u}$ =

$\boldsymbol{v}$ =

c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten.

$\boldsymbol{\rho_{xy}}$ =

d) Wie lautet die Korrelationsgerade $y = K(x)$? Bei welchem Punkt y_0 schneidet diese die y-Achse?

$\boldsymbol{y_0}$ =

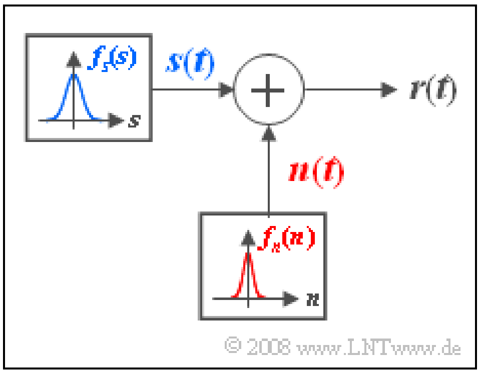
e) Berechnen Sie die Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße x negativ ist.

Pr(x < 0) =

f) Berechnen Sie die Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_y(y)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße y größer als 3 ist?

Pr(y > 3) =

Z4.8: AWGN-Kanal



Wir betrachten hier ein analoges Nachrichtensignal $s(t)$, dessen Amplitudenwerte gaußverteilt sind. Der Effektivwert σ_s dieses mittelwertfreien Signals beträgt 1 V. Diese Größe bezeichnet man auch als die Streuung.

Bei der Übertragung wird $s(t)$ von einem Störsignal $n(t)$ additiv überlagert, das ebenso wie $s(t)$ als gaußverteilt und mittelwertfrei angenommen werden kann. Der Effektivwert (die Streuung) des Störsignals sei allgemein σ_n. Es kann angenommen werden, dass zwischen Nutzsignal $s(t)$ und Störsignal $n(t)$ keine statistischen Abhängigkeiten bestehen.

Man bezeichnet eine solche Konstellation als *Additive White Gaussian Noise* (AWGN) und verwendet als Qualitätskriterium für das Empfangssignal $r(t)$ das Signal-zu-Störverhältnis (Signal-to-Noise-Ratio):

$$\mathrm{SNR} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.2** und **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "Z4.8: AWGN-Kanal"

a) Geben Sie die WDF $f_r(r)$ des Empfangssignals $r(t)$ allgemein an. Wie groß ist der Effektivwert σ_r, wenn σ_n = 0.75 V beträgt?

$\boldsymbol{\sigma_r}$ = V

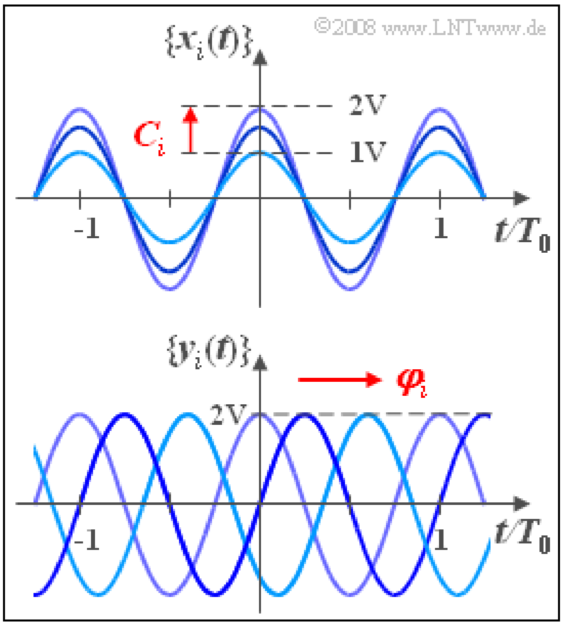
b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten, der zwischen den beiden Signalen $s(t)$ und $r(t)$ besteht. Welcher Wert ergibt sich für σ_n = 0.75 V?

$\boldsymbol{\rho_{sr}}$ =

c) Berechnen Sie ρ_{sr} abhängig von SNR. Leiten Sie eine Näherung für große SNR–Werte ab. Welcher Koeffizient ergibt sich für $10 \cdot \lg \text{SNR} = 30$ dB?

$\boldsymbol{\rho_{sr}}$ =

A4.9: Zykloergodizität



Wir betrachten zwei unterschiedliche Zufallsprozesse, deren Musterfunktionen harmonische Schwingungen mit jeweils gleicher Frequenz $f_0 = 1/T_0$ sind.

Beim oben dargestellten Zufallsprozess $\{x_i(t)\}$ ist die Amplitude die stochastische Komponente, wobei der Zufallsparameter C_i alle Werte zwischen 1V und 2V mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen kann:

$$\{x_i(t)\} = \{C_i \cdot \cos(2\pi f_0 t)\}.$$

Beim Prozess $\{y_i(t)\}$ weisen alle Musterfunktionen die gleiche Amplitude auf: x_0 = 2V. Hier variiert die Phase φ_i, die gleichverteilt zwischen 0 und 2π ist:

$$\{y_i(t)\} = \{x_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi_i)\}.$$

Die Eigenschaften *zyklostationär* und *zykloergodisch* sagen aus, dass die Prozesse zwar im strengen Sinne nicht als stationär und ergodisch zu bezeichnen sind, die statistischen Kennwerte aber für Vielfache der Periondauer T_0 jeweils gleich sind. In diesen Fällen sind auch die meisten der Berechnungsregeln, die eigentlich nur für ergodische Prozesse gelten, anwendbar.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.9: Zykloergodizität"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Der Prozess $\{x_i(t)\}$ ist stationär.
- [ ] Der Prozess $\{x_i(t)\}$ ist ergodisch.
- [ ] Der Prozess $\{y_i(t)\}$ ist stationär.
- [ ] Der Prozess $\{y_i(t)\}$ ist ergodisch.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_y(\tau)$ für verschiedene τ.

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = 0)}$ = ___ V^2

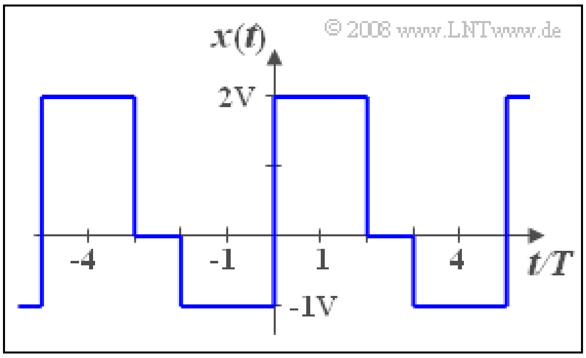
$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = 0.25 \cdot T_0)}$ = ___ V^2

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = 1.50 \cdot T_0)}$ = ___ V^2

c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind bezüglich $\{y_i(t)\}$ zutreffend?

- [ ] Alle Mustersignale sind gleichsignalfrei.
- [ ] Alle Mustersignale besitzen einen Effektivwert von 2V.
- [ ] Die AKF hat die doppelte Periode wie die Mustersignale.

Z4.9: Periodische AKF



Wir betrachten in dieser Aufgabe einen periodischen und gleichzeitig ergodischen stochastischen Prozess $\{x_i(t)\}$, der durch die dargestellte Musterfunktion $x(t)$ vollständig charakterisiert ist.

Weitere Mustersignale des Zufallsprozesses $\{x_i(t)\}$ erhält man durch Verschiebung um unterschiedlich große Verzögerungen τ_i, wobei τ_i als gleichverteilt zwischen 0 und der Periodendauer T_0 angenommen wird.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "Z4.9: Periodische AKF"

a) Ermitteln Sie die Periodendauer T_0, normiert auf die Zeitdauer T.

T_0/T =

b) Wie groß ist der Gleichsignalanteil (lineare Mittelwert) des Prozesses?

m_x = V

c) Wie groß ist die (auf den Widerstand 1 Ω bezogene) Prozessleistung?

P_x = V^2

d) Berechnen Sie die AKF-Werte für $\tau = T$ und $\tau = 2T$.

$\varphi_x(\tau = T)$ = V^2

$\varphi_x(\tau = 2T)$ = V^2

e) Skizzieren Sie den AKF-Verlauf unter Berücksichtigung von Symmetrieen. Welche Werte ergeben sich für $\tau = 3T$ und $\tau = 4T$?

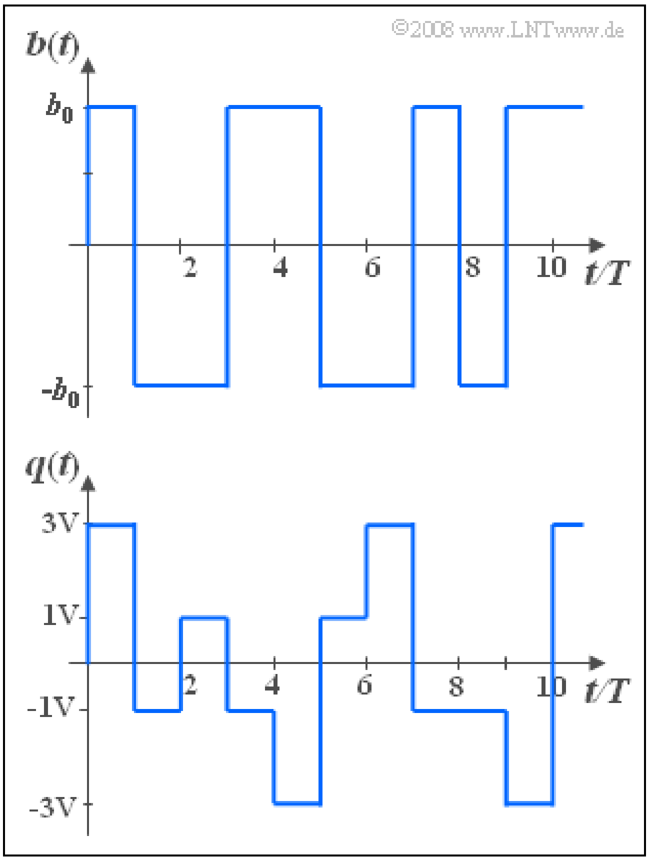
$\varphi_x(\tau = 3T)$ = V^2

$\varphi_x(\tau = 4T)$ = V^2

f) Berechnen Sie den Erwartungswert der AKF bezüglich aller τ-Werte. Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\text{E}[\varphi_x(\tau)]$ = V^2

A4.10: Binär und quaternär



Wir betrachten hier ein Binärsignal $b(t)$ und ein Quarternärsignal $q(t)$, wobei gilt:

- Die beiden Signale sind rechteckförmig, und die Dauer der einzelnen Rechtecke beträgt jeweils T (Symboldauer).
- Die durch die Impulshöhen der einzelnen Rechteckimpulse dargestellten Symbole (mit Stufenzahl $M = 2$ bzw. $M = 4$) sind statistisch unabhängig.
- Wegen der bipolaren Signalkonstellation sind beide Signale gleichsignalfrei, wenn die Symbolwahrscheinlichkeiten geeignet (symmetrisch) gewählt werden.

Aufgrund der letztgenannten Eigenschaft folgt für die Wahrscheinlichkeiten der Binärsymbole:

$$\Pr(b(t) = b_0) = \Pr(b(t) = -b_0) = \frac{1}{2}.$$

Dagegen gelte für das Quarternärsignal:

$$\Pr(q(t) = 3\text{V}) = \Pr(q(t) = -3\text{V}) = \frac{1}{6}, \quad \Pr(q(t) = 1\text{V}) = \Pr(q(t) = -1\text{V}) = \frac{2}{6}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.10: Binär und quaternär"

a) Berechnen Sie den AKF-Wert $\varphi_q(\tau = 0)$ des Quarternärsignals.

$\boldsymbol{\varphi_q(\tau = 0)}$ = V^2

b) Wie groß ist der AKF-Wert bei $\tau = T$? Begründen Sie, warum die AKF-Werte für $|\tau| > T$ genauso groß sind. Skizzieren Sie den AKF-Verlauf.

$\boldsymbol{\varphi_q(\tau = T)}$ = V^2

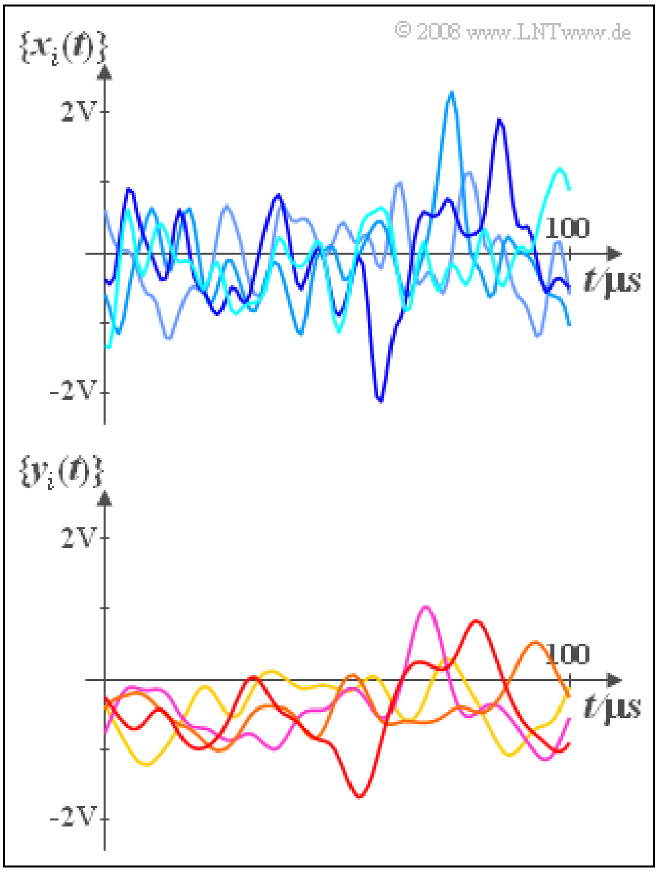
c) Mit welchem Wert von b_0 hat das Binärsignal $b(t)$ genau die gleiche AKF?

$\boldsymbol{b_0}$ = V

d) Welche der Beschreibungsgrößen eines stochastischen Prozesses lassen sich aus der AKF ermitteln?

- ☐ Periodendauer
- ☐ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
- ☐ Linearer Mittelwert
- ☐ Varianz
- ☐ Moment 3. Ordnung
- ☐ Phasenbeziehungen

Z4.10: Korrelationsdauer



Das nebenstehende Bild zeigt Mustersignale von zwei Zufallsprozessen mit jeweils gleicher Leistung $P_x = P_y = 5$ mW. Vorausgesetzt ist hierbei der Widerstand $R = 50\ \Omega$. Der Prozess $\{x_i(t)\}$

- ist mittelwertfrei ($m_x = 0$),
- besitzt die gaußförmige AKF
  $$\varphi_x(\tau) = \varphi_x(\tau = 0) \cdot \mathrm{e}^{-\pi \cdot (\tau/\nabla\tau_x)^2},$$
- und weist eine äquivalente AKF-Dauer $\nabla\tau_x$ von 5 Mikrosekunden auf.

Wie aus dem unteren Bild zu erkennen ist, weist der Prozess $\{y_i(t)\}$ sehr viel stärkere innere statistische Bindungen auf.

Oder anders ausgedrückt: Der Zufallsprozess $\{y_i(t)\}$ ist niederfrequenter als $\{x_i(t)\}$, und die äquivalente AKF-Dauer ist $\nabla\tau_y = 10$ µs.

Aus der Skizze ist auch zu erkennen, dass $\{y_i(t)\}$ nicht gleichsignalfrei ist. Der Gleichsignalanteil beträgt vielmehr $m_y = –0.3$ V.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "Z4.10: Korrelationsdauer"

a) Welchen Effektivwert besitzen die Mustersignale des Prozesses $\{x_i(t)\}$?

σ_x = V

b) Welche AKF-Werte ergeben sich für τ = 2 µs bzw. für τ = 5 µs?

$\varphi_x(\tau = 2\ \mu\text{s})$ = mW

$\varphi_x(\tau = 5\ \mu\text{s})$ = mW

c) Wie groß ist die Korrelationsdauer T_K, also derjenige Zeitpunkt, bei dem die AKF auf die Hälfte des Maximums abgefallen ist?

T_K = µs

d) Welchen Effektivwert besitzen die Mustersignale des Prozesses $\{y_i(t)\}$?

σ_y = V

e) Berechnen Sie die AKF $\varphi_y(\tau)$. Wie groß ist der AKF-Wert bei τ = 10 µs? Welcher AKF-Verlauf ergäbe sich bei positivem Mittelwert (m_y = 0.3 V)?

$\varphi_y(\tau = 10\ \mu\text{s})$ = mW

A4.11: C-Programm „akf1”

Sie sehen nebenstehend das C-Programm „akf1” zur Berechnung der diskreten AKF-Werte $\varphi_x(k)$ mit dem Index $k = 0, \ldots , l$. Hierzu ist Folgendes zu bemerken:

```
1:  void akf1 (l, AKF)
2:  long l; float AKF[ ];
3:  {
4:     float x( ), H[11];
5:     long N=10000;
6:     long i=0,j=0,k=0,z=0;
7:     for (k=0; k<=l; k++)
8:       { AKF[k]=0;
9:         H[k]=x( );
10:      }
11:    for (z=0; z<N; z++)
12:      {
13:        for (k=0; k <= l; k ++)
14:          { j=i+k;
15:            if (j > l) j=j-l-1;
16:            AKF[k]=AKF[k]+H[i]*H[j];
17:          }
18:        H[i]=x( );
19:        i++;
20:        if (i>l) i=i-l-1;
21:      }
22:    for (k=0; k<= l; k++)
23:      AKF[k] /= N;
24: }
```


- Der an das Programm übergebene Long-Wert sei l = 10. Die AKF-Werte $\varphi_x(0), \ldots , \varphi_x(10)$ werden mit dem Float-Feld AKF[ ] an das aufrufende Programm zurückgegeben. In den Zeilen 7 und 8 wird dieses Feld mit Nullen vorbelegt.
- Die zu analysierenden Zufallsgrößen x_ν werden mit der Float-Funktion x( ) erzeugt (siehe Zeile 4). Diese Funktion wird insgesamt $N + l + 1 = 10011$ mal aufgerufen (Zeile 9 und 18).
- Im Gegensatz zu dem im Kapitel 4.4 angegebenen Algorithmus, der im Programm „akf2” von Aufgabe Z4.11 direkt umgesetzt ist, benötigt man hier ein Hilfsfeld H[ ] mit nur $l + 1 = 11$ Speicherelementen.
- Vor Beginn des eigentlichen Berechnungsalgorithmus (Zeile 11 bis 21) stehen in den 11 Speicherzellen die Zufallswerte $x_1 \ldots x_{11}$.
- Die äußere Schleife mit der Laufvariablen z (rot markiert) wird N-mal durchlaufen. In der inneren Schleife (weiß markiert) werden mit dem Laufindex $k = 0, \ldots , l$ alle Speicherzellen des Feldes $AKF[k]$ um den Betrag $x_\nu \cdot x_{\nu+k}$ erhöht.
- In den Zeilen 22 und 23 werden schließlich alle AKF-Werte durch die Anzahl N dividiert.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Theorieseite **Numerische Ermittlung der AKF.**

Fragebogen zu "A4.11: C-Programm „akf1”"

a) Welche Elemente i und j des Hilfsfeldes H[...] werden beim ersten Durchlauf (z = 0) zur Berechnung des AKF-Wertes $\varphi_x(k = 6)$ verwendet? Welche Zufallswerte x_ν stehen in diesen Speicherzellen?

$\boldsymbol{i}$ =

$\boldsymbol{j}$ =

b) Welche Speicherzelle $H[i]$ wird nach dem ersten Schleifendurchgang (z = 0) mit einer neuen Zufallsgröße x_ν belegt? Welcher Index ν wird dabei eingetragen?

$\boldsymbol{i}$ =

$\boldsymbol{\nu}$ =

c) Welche Speicherelemente $H[i]$ und $H[j]$ werden beim Schleifendurchlauf z = 83 zur Berechnung des AKF-Wertes $\varphi_x(k = 6)$ verwendet? Welche Zufallswerte stehen in diesen Speicherzellen?

$\boldsymbol{i}$ =

$\boldsymbol{j}$ =

Z4.11: C-Programm „akf2”

Sie sehen rechts das C-Programm „akf2” zur Berechnung der diskreten AKF-Werte $\varphi_x(k)$ mit Index k = 0, ... , l.

Im Gegensatz zum Programm „akf1” aus Aufgabe A4.11 wird hier der im Theorieteil 4.4 beschriebene Algorithmus direkt angewendet. Dabei ist zu beachten:

```
1:  void akf2(l, AKF)
2:  long l; float AKF[ ];
3:  {
4:    float x( ), H[10000];
5:    long N=10000;
6:    long k=0, nu=0;
7:    for (k=0; k<=l; k++)
8:      AKF[k]=0;
9:    for (nu=0; nu<N; nu++)
10:     H[nu]=x( );
11:   for (nu=0;nu< N-l;nu++)
12:   for (k=0; k<=l; k++)
13:     AKF[k]=AKF[k]+H[nu]*H[nu+k];
14:   for (k=0; k<=l; k++)
15:     AKF[k] /= (N-l);
16: }
```


- Der an das Programm übergebene Long-Wert sei hier l = 10. Die berechneten AKF-Werte $\varphi_x(0)$ ... $\varphi_x(10)$ werden mit dem Float-Feld *AKF*[ ] an das Hauptprogramm zurückgegeben. In den Zeilen 7 und 8 wird dieses Feld mit Nullen vorbelegt.
- Die Zufallsgröße x( ) ist als Float-Funktion in Zeile 4 definiert, ebenso ein Hilfsfeld *H*[10000], in das die N = 10000 Abtastwerte x_ν eingetragen werden (Zeile 9 und 10).
- Die Bezeichnungen der Laufvariablen in Zeile 6 sind an den angegebenen Algorithmus angepasst.
- Die eigentliche AKF-Berechnung erfolgt ab Zeile 11. Dieser Programmteil ist im Programmcode rot gekennzeichnet.

Hinweis: Die Aufgabe beschreibt den im Kapitel 4.4 angegebenen **Berechnungsalgorithmus.**

Fragebogen zu "Z4.11: C-Programm „akf2”"

a) Auf wie vielen Summanden (S) basiert die AKF-Berechnung für den Index k = 0 bzw. für k = 10?

$S_{k=0}$ =

$S_{k=10}$ =

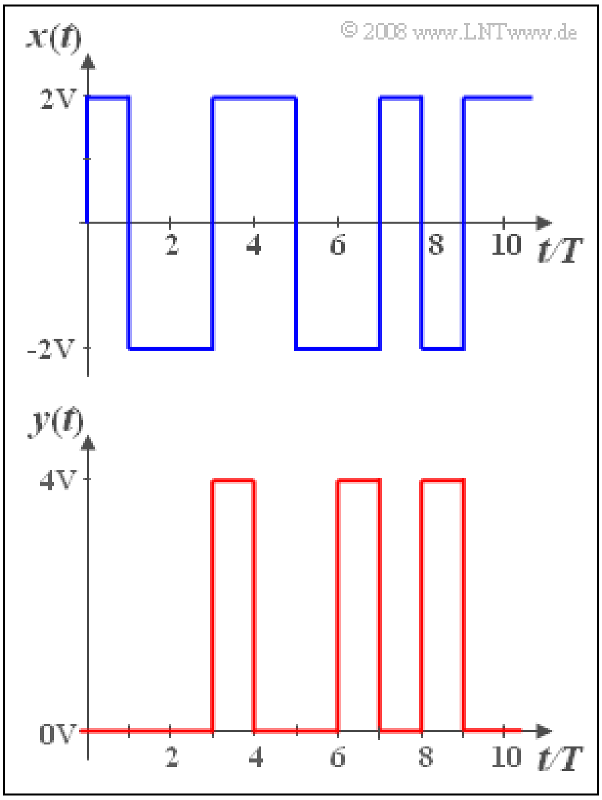
b) Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- [ ] Die Rechenzeit steigt linear mit $l + 1$, also mit der Anzahl der zu berechnenden AKF-Werte.
- [ ] Die Rechenzeit nimmt mit der Anzahl N der berücksichtigten Abtastwerte quadratisch zu.
- [ ] Die Berechnung wird mit steigendem N genauer.
- [ ] Wird eine Floatvariable mit 4 Byte dargestellt, so benötigt „akf2” mindestens $4 \cdot N$ Byte Speicherplatz.

c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Je stärker die inneren statistischen Bindungen des Prozesses sind, desto ungenauer ist bei gegebenem N das AKF-Ergebnis.
- [ ] Je stärker die inneren statistischen Bindungen des Prozesses sind, desto genauer ist bei gegebenem N das AKF-Ergebnis.
- [ ] Besitzt der Prozess statistische Bindungen, so sind die Fehler der numerischen AKF-Berechnung ebenfalls korreliert. *Beispiel:* Ist der Wert $\varphi_x(k = 5)$ zu groß, so werden mit großer Wahrscheinlichkeit auch $\varphi_x(k = 4)$ und $\varphi_x(k = 6)$ zu groß sein.

A4.12: LDS eines Binärsignals



Wir betrachten ein rechteckförmiges Binärsignal $x(t)$ mit gleichwahrscheinlichen Amplitudenwerten +2V und –2V. Die Symboldauer beträgt T = 1 µs. In Aufgabe A4.10 wurde bereits gezeigt, dass die dazugehörige AKF auf den Bereich von $-T \le \tau \le T$ beschränkt ist und in diesem Bereich dreieckförmig verläuft:

$$\varphi_x(\tau) = 4\,\mathrm{V}^2 \cdot (1 - \frac{|\tau|}{T}).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die einzelnen Symbole statistisch voneinander unabhängig sind.

Das unten skizzierte Signal $y(t)$ ist ebenfalls binär und rechteckförmig mit der gleichen Symboldauer T = 1 µs. Die möglichen Amplitudenwerte sind nun aber 0V und 4V, wobei der Amplitudenwert 4V seltener als der Wert 0V auftritt. Es gilt:

$$\mathrm{Pr}(x(t) = 4\,\mathrm{V}) = p \quad \mathrm{mit} \quad 0 < p \le 0.25.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.5.** Beachten Sie die folgende Fourierkorrespondenz:

$$\Delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad T \cdot \mathrm{si}^2(\pi f T).$$

Dabei bezeichnet $\Delta(t)$ einen um t = 0 symmetrischen Dreieckimpuls mit $\Delta(0)$ = 1 und $\Delta(t)$ = 0 für $|t| \ge T$. Weiterhin gilt die Notation $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ mit folgendem Integralwert:

$$\int_0^1 \mathrm{si}^2(\pi u)\,\mathrm{d}u \approx 0.456.$$

Fragebogen zu "A4.12: LDS eines Binärsignals"

a) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ des bipolaren Zufallssignals $x(t)$ an. Welche LDS-Werte ergeben sich für $f = 0$, $f = 500$ kHz, $f = 1$ MHz?

$\boldsymbol{\Phi_x(f = 0)}$ = V²/Hz

$\boldsymbol{\Phi_x(f = 500\ \mathrm{kHz})}$ = V²/Hz

$\boldsymbol{\Phi_x(f = 1\ \mathrm{MHz})}$ = V²/Hz

b) Berechnen Sie die AKF $\varphi_y(\tau)$ des unipolaren Zufallssignals $y(t)$. Welche AKF-Werte ergeben sich mit $p = 0.25$ für $\tau = 0$, $\tau = T$ und $\tau = 2T$?

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = 0)}$ = V²

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = T)}$ = V²

$\boldsymbol{\varphi(\tau_y = 2T)}$ = V²

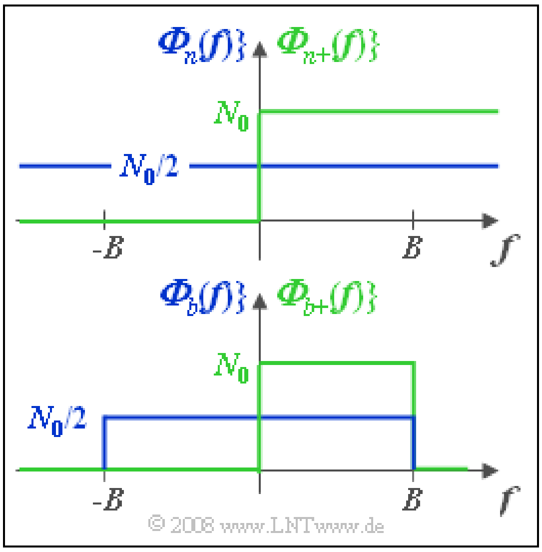
c) Berechnen Sie das zugehörige Leistungsdichtespektrum $\Phi_y(f)$. Welcher Wert ergibt sich für $f = 500$ kHz?

$\boldsymbol{\Phi_y(f = 500\ \mathrm{kHz})}$ = V²/Hz

d) Welche mittlere Signalleistung P_M (bezogen auf den Widerstand 1 Ω) zeigt ein Messgerät an, das nur Leistungsanteile bis 1 MHz erfasst?

$\boldsymbol{P_\mathrm{M}}$ = V²

Z4.12: Weißes Rauschen



Man bezeichnet ein Rauschsignal $n(t)$ als *weiß*, wenn darin alle spektralen Anteile ohne Bevorzugung von irgendwelchen Frequenzen enthalten sind.

- Das physikalische, nur für positive Frequenzen f definierte Leistungsdichtespektrum $\Phi_{n+}(f)$ ist konstant (gleich N_0) und reicht frequenzmäßig bis ins Unendliche.
- $\Phi_{n+}(f)$ ist in der oberen Grafik grün dargestellt. Das Pluszeichen im Index soll anzeigen, dass die Funktion nur für positive Werte von f gültig ist.
- Zur mathematischen Beschreibung verwendet man meist das zweiseitige Leistungsdichtespektrum $\Phi_n(f)$. Hier gilt für alle Frequenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ (blauer Kurvenzug im oberen Bild):

$$\Phi_n(f) = N_0/2.$$

Im unteren Bild sind die beiden Leistungsdichtespektren $\Phi_b(f)$ und $\Phi_{b+}(f)$ eines bandbegrenzten weißen Rauschsignals $b(t)$ dargestellt. Es gilt mit der einseitigen Bandbreite B:

$$\Phi_b(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{für} \quad |f| \le B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \Phi_{b+}(f) = \begin{cases} N_0 & \text{für} \quad 0 \le f \le B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bei der Rechnersimulation von Rauschvorgängen muss stets von bandbegrenztem Rauschen ausgegangen werden, da hier nur zeitdiskrete Vorgänge behandelt werden können. Dazu muss das Abtasttheorem (siehe Buch „Signaldarstellung", Kapitel 5.1) eingehalten werden. Dieses sagt aus, dass die Bandbreite B gemäß dem Stützstellenabstand T_A der Simulation eingestellt werden muss.

Gehen Sie in der gesamten Aufgabe von folgenden Zahlenwerten aus:

- Die Rauschleistungsdichte (bezogen auf den Widerstand 1 Ω) beträgt $N_0 = 4 \cdot 10^{-14}$ V²/Hz.
- Die (einseitige) Bandbreite des bandbegrenzten weißen Rauschens beträgt $B = 100$ MHz.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 4.4** und **Kapitel 4.5.**
Die Eigenschaften von weißem Rauschen sind in einem Lernvideo zusammengefasst:

Der AWGN-Kanal – Teil 2 (Dauer 5:15)

Fragebogen zu "Z4.12: Weißes Rauschen"

a) Welche Aussagen treffen bei einem weißen Rauschsignal $n(t)$ immer zu? Begründen Sie Ihre Antworten.

- [ ] Die AKF $\varphi_n(\tau)$ hat einen si-förmigen Verlauf.
- [ ] Die AKF $\varphi_n(\tau)$ ist ein Dirac bei $\tau = 0$ mit Gewicht $N_0/2$.
- [ ] Im mathematisch strengen Sinn gibt es kein weißes Rauschen.
- [ ] Thermisches Rauschen kann stets als weiß angenähert werden.
- [ ] Weißes Rauschen ist stets gaußverteilt.

b) Berechnen Sie die AKF $\varphi_b(\tau)$ des bandbegrenzten Zufallssignals $b(t)$. Welcher Wert ergibt sich für $\tau = 0$?

B = 100 MHz: $\varphi_b(\tau = 0)$ = V^2

c) Wie groß ist der Effektivwert dieses Rauschsignals?

σ_b = V

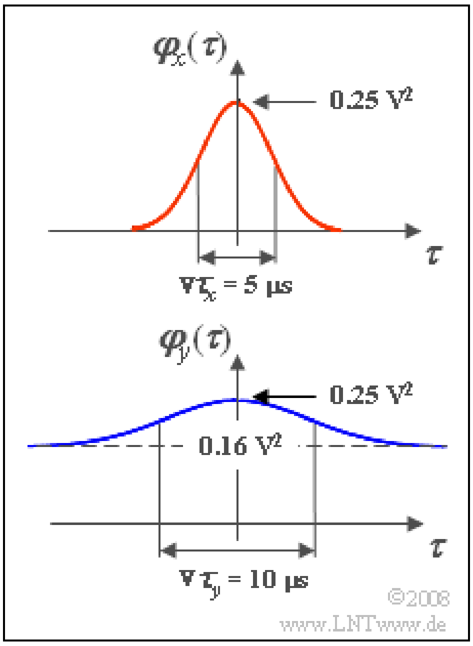
d) Welcher Abtastabstand T_A ist (mindestens) zu wählen, wenn das Signal $b(t)$ zur zeitdiskreten Simulation von weißem Rauschen eingesetzt wird?

T_A = ns

e) Gehen Sie nun vom Abtastabstand T_A = 1 ns aus. Welche der Aussagen treffen dann für zwei aufeinanderfolgende Abtastwerte des Signals $b(t)$ zu?

- ○ Die Abtastwerte sind unkorreliert.
- ○ Die Abtastwerte sind positiv korreliert.
- ○ Die Abtastwerte sind negativ korreliert.

A4.13: Gaußförmige AKF



Der hier betrachtete Zufallsprozess $\{x_i(t)\}$ sei durch die oben skizzierte Autokorrelationsfunktion (AKF) charakterisiert:

$$\varphi_x(\tau) = 0.25\text{V}^2 \cdot \text{e}^{-\pi\cdot(\tau/5\mu\text{s})^2}.$$

Dieser Zufallsprozess ist mittelwertfrei und die äquivalente AKF-Dauer beträgt $\nabla\tau_x$ = 5 µs.

Im unteren Bild ist die AKF des Prozesses $\{y_i(t)\}$ dargestellt. Diese lautet mit der äquivalenten AKF-Dauer $\nabla\tau_y$ = 10 µs:

$$\varphi_y(\tau) = 0.16\text{V}^2 + 0.09\text{V}^2 \cdot \text{e}^{-\pi\cdot(\tau/\nabla\tau_y)^2}.$$

In dieser Aufgabe werden die Leistungsdichtespektren der beiden Prozesse gesucht.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.5.** Zur Lösung dieser Aufgabe können Sie folgende Fourierkorrespondenz benutzen:

$$\text{e}^{-\pi\cdot(f/\Delta f)^2} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\ \Delta f \cdot \text{e}^{-\pi\cdot(\Delta f\cdot t)^2}.$$

Fragebogen zu "A4.13: Gaußförmige AKF"

a) Wie groß ist die äquivalente LDS-Bandbreite des Prozesses $\{x_i(t)\}$?

∇f_x = Hz

b) Wie lautet $\Phi_x(f)$? Geben Sie die LDS-Werte für f = 0 und f = 200 kHz ein.

$\Phi_x(f = 0)$ = V^2/Hz

$\Phi_x(f = 200\text{ kHz})$ = V^2/Hz

c) Welche Aussagen gelten, wenn der Zufallsprozess keine periodischen Anteile besitzt? Vorausgesetzt wird desweiteren eine konstante Leistung.

- [ ] Die Prozessleistung ist das Integral über das LDS.
- [ ] Bei mittelwertfreiem Prozess ist das LDS stets kontinuierlich.
- [ ] Je breiter die AKF, um so breiter ist auch das LDS.
- [ ] Eine breitere AKF bewirkt höhere LDS-Werte.

d) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_y(f)$. Welche Werte ergeben sich für den kontinuierlichen LDS-Anteil bei f = 0 und f = 200 kHz?

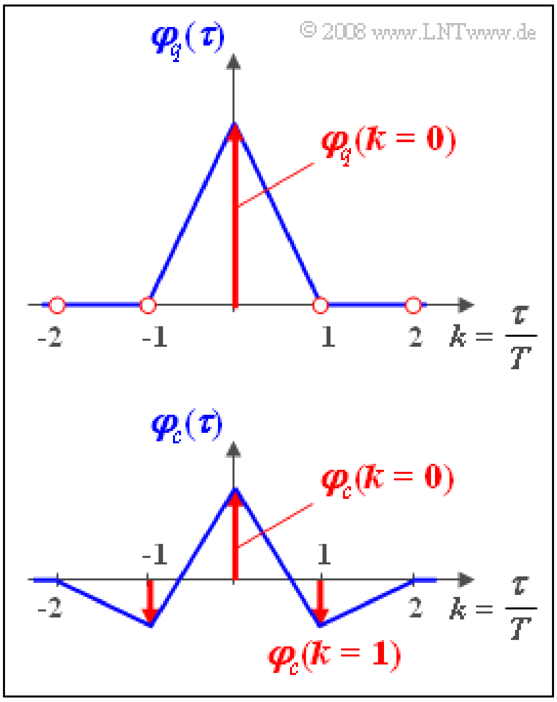
$\Phi_y(f = 0)$ = V^2/Hz

$\Phi_y(f = 200\text{ kHz})$ = V^2/Hz

e) Welche der folgenden Aussagen stimmen bezüglich des Prozesses $\{y_i(t)\}$?

- [ ] Das LDS beinhaltet einen Dirac bei der Frequenz $f = \nabla f_y$.
- [ ] Das LDS beinhaltet einen Dirac bei der Frequenz f = 0.
- [ ] Diracgewicht und kontinuierliches LDS haben gleiche Einheit.

Z4.13: AMI-Code



Zur Spektralanpassung (Formung) eines Digitalsignals an die Eigenschaften des Kanals verwendet man so genannte *Pseudoternärcodes*. Bei diesen Codes wird die binäre Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ nach einer festen Vorschrift in eine Folge $\langle c_\nu \rangle$ von Ternärsymbolen umgesetzt:

$$q_\nu \in \{-1,\ +1\} \quad \Rightarrow \quad c_\nu \in \{-1,\ 0,\ +1\}.$$

Der bekannteste Vertreter der Pseudoternärcodes ist der AMI-Code (von *Alternate Mark Inversion*). Hier wird der Binärwert $q_\nu = -1$ stets auf $c_\nu = 0$ abgebildet, während $q_\nu = +1$ abwechselnd (alternierend) durch die Ternärwerte $c_\nu = +1$ und $c_\nu = -1$ dargestellt wird. Vereinbarungsgemäß wird beim ersten Auftreten von $q_\nu = +1$ das Ternärsymbol $c_\nu = +1$ ausgewählt.

Weiter wird vorausgesetzt, dass die zwei möglichen Quellensymbole jeweils gleichwahrscheinlich sind und die Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ keine inneren statistischen Bindungen aufweist. Somit sind alle diskreten AKF-Werte gleich 0 mit Ausnahme von $\varphi_q(k = 0)$:

$$\varphi_q(k \cdot T) = 0 \quad \text{falls} \quad k \neq 0.$$

T bezeichnet den Abstand der Quellen– bzw. Codesymbole. Verwenden Sie den Wert $T = 1$ µs.

Das Bild zeigt die gegebenen Autokorrelationsfunktionen. Bitte beachten Sie:

- Rot eingezeichnet sind jeweils die zeitdiskreten Darstellungen $A\{\varphi_q(\tau)\}$ und $A\{\varphi_c(\tau)\}$ der Autokorrelationsfunktionen, jeweils mit dem Bezugswert T.
- Die blau dargestellten Funktionen zeigen die zeitkontinuierlichen Verläufe $\varphi_q(\tau)$ und $\varphi_c(\tau)$ der AKF, wobei Rechtecksignale vorausgesetzt sind.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Numerische Ermittlung des LDS** im Kapitel 4.5. Benutzen Sie die folgende Fourierkorrespondenz

$$\Delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad T \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

$\Delta(t)$ bezeichnet einen um $t = 0$ symmetrischen Dreieckimpuls mit $\Delta(0) = 1$ und $\Delta(t) = 0$ für $|t| \geq T$.

Fragebogen zu "Z4.13: AMI-Code"

a) Wie groß ist der diskrete AKF-Wert der Quellensymbole für $k = 0$?

$\varphi_q(k = 0)$ =

b) Welche Aussagen gelten für die LDS–Funktionen $\Phi_q(f)$ und $\mathrm{P}\{\Phi_q(f)\}$?

- [ ] $\mathrm{P}\{\Phi_q(f)\}$ ist für alle Frequenzen eine Konstante.
- [ ] $\Phi_q(f)$ ist für $|f \cdot T| < 0.5$ konstant und außerhalb 0.
- [ ] $\Phi_q(f)$ verläuft si^2- förmig.

c) Die Quellensymbolfolge sei $\langle q_\nu \rangle$ = +1, –1, +1, +1, –1, +1, +1, –1, –1, –1. Wie lauten die Codesymbole c_ν? Geben Sie das Codesymbol c_6 ein.

c_6 =

d) Wie groß ist der quadratische Mittelwert der Codesymbolfolge $\langle c_\nu \rangle$.

$\varphi_c(k = 0)$ =

e) Berechnen Sie die AKF-Werte $\varphi_c(k = +1)$ und $\varphi_c(k = -1)$.

$\varphi_c(k = +1)$ =

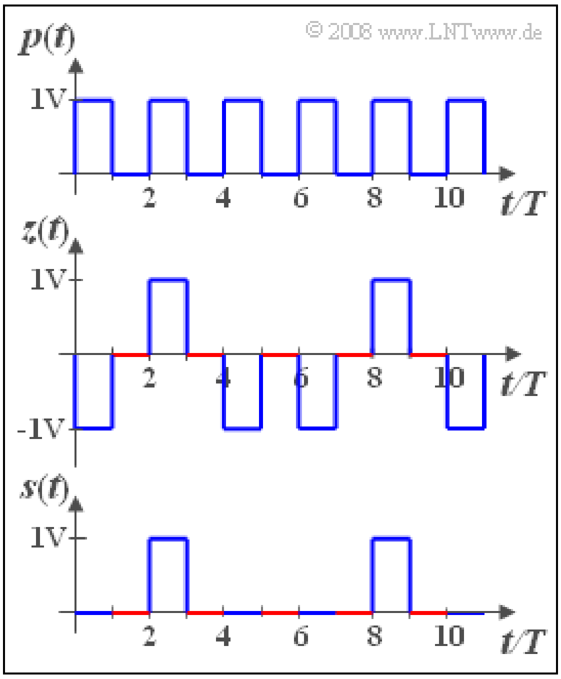
$\varphi_c(k = -1)$ =

f) Welche spektrale Leistungsdichte $\Phi_c(f)$ ergibt sich für die Frequenz $f = 0$ bzw. für $f = 500$ kHz? *Hinweis:* Für $|k| \geq 2$ sind alle AKF-Werte $\varphi_c(k) = 0$.

$\Phi_c(f = 0)$ = 1/Hz

$\Phi_c(f = 500\ \mathrm{kHz})$ = 1/Hz

A4.14: AKF/KKF bei Rechtecken



beträgtWir betrachten ein periodisches Rechtecksignal $p(t)$ mit den beiden möglichen Amplitudenwerten 0V und 1V und der Rechteckdauer T. Die Periodendauer beträgt somit $T_0 = 2T$.

Darunter ist das Zufallssignal $z(t)$ gezeichnet, das zwischen $(2i–1)T$ und $2iT$ mit $i = \ldots, –1, 0, +1, \ldots$ (im Bild rot hervorgehoben) jeweils $z(t)$ = 0V ist. Dagegen ist in den blau gezeichneten Intervallen zwischen $2iT$ und $(2i+1)T$ der Signalwert zweipunktverteilt ±1V.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in den blau dargestellten Intervallen $z(t)$ = +1V gilt, sei allgemein gleich p und unabhängig von den vorher ausgewürfelten Werten.

Das unterste Signal im nebenstehenden Bild kann aus den beiden ersten konstruiert werden. Es gilt:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot [p(t) + z(t)].$$

In den rot eingezeichneten Zeitintervallen zwischen $(2i–1)T$ und $2iT$ (i ganzzahlig) gilt $s(t)$ = 0V, da hier sowohl $p(t)$ als auch $z(t)$ gleich 0 sind. In den dazwischen liegenden Intervallen ist der Amplitudenwert zweipunktverteilt zwischen 0V und 1V, wobei der Wert 1V wieder mit der Wahrscheinlichkeit p auftritt. Oder anders ausgedrückt: Die Signale $z(t)$ und $s(t)$ sind äquivalente Mustersignale des identischen Zufallsprozesses mit bipolarer (–1V, +1V) bzw. unipolarer (0V, 1V) Signaldarstellung.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 4.4** und **Kapitel 4.6.** Skizzieren Sie die gesuchten Korrelationsfunktionen jeweils im Bereich von $–7T$ bis $+7T$.

Fragebogen zu "A4.14: AKF/KKF bei Rechtecken"

a) Berechnen Sie die AKF $\varphi_z(\tau)$ und skizzieren Sie diese für p = 0.25. Welche Werte ergeben sich für $\tau = 0$, $\tau = 3T$ und $\tau = 6T$?

$\varphi_z(\tau = 0)$ = V^2

$\varphi_z(\tau = 3T)$ = V^2

$\varphi_z(\tau = 6T)$ = V^2

b) Berechnen Sie nun unter Zuhilfenahme des Ergebnisses aus a) die AKF $\varphi_p(\tau)$. Welche Werte ergeben sich für $\tau = 0$, $\tau = 3T$ und $\tau = 6T$?

$\varphi_p(\tau = 0)$ = V^2

$\varphi_p(\tau = 3T)$ = V^2

$\varphi_p(\tau = 6T)$ = V^2

c) Es gelte p = 0.25. Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{pz}(\tau)$ für $\tau = 0$, $\tau = 3T$ und $\tau = 6T$?

$\varphi_{pz}(\tau = 0)$ = V^2

$\varphi_{pz}(\tau = 3T)$ = V^2

$\varphi_{pz}(\tau = 6T)$ = V^2

d) Welche AKF $\varphi_c(\tau)$ ergibt sich allgemein für die Summe $c(t) = a(t) + b(t)$?

- $\varphi_c(\tau) = \varphi_a(\tau) + \varphi_b(\tau)$.
- $\varphi_c(\tau) = \varphi_a(\tau) + \varphi_{ab}(\tau) + \varphi_{ba}(\tau) + \varphi_b(\tau)$.
- $\varphi_c(\tau) = \varphi_a(\tau) * \varphi_b(\tau)$.

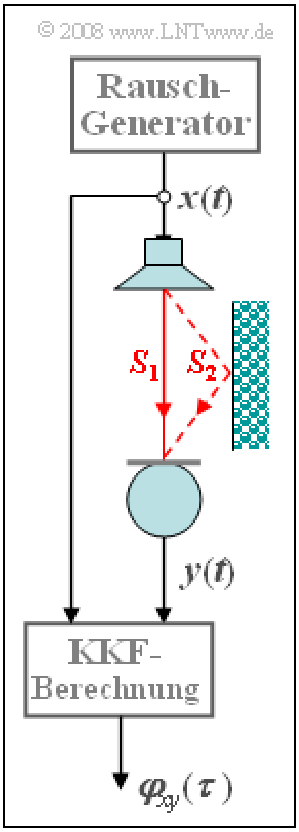
e) Berechnen Sie unter Berücksichtigung des Ergebnisses von d) die AKF $\varphi_s(\tau)$. Welche Werte ergeben sich mit p = 0.25 für $\tau = 0$, $\tau = 3T$ und $\tau = 6T$?

$\varphi_s(\tau = 0)$ = V^2

$\varphi_s(\tau = 3T)$ = V^2

$\varphi_s(\tau = 6T)$ = V^2

Z4.14: Auffinden von Echos



Zur Messung akustischer Echos in Räumen – zum Beispiel bedingt durch Reflexionen an einer Wand – kann die nebenstehende Anordnung verwendet werden. Der Rauschgenerator erzeugt ein „im relevanten Frequenzbereich Weißes Rauschen" $x(t)$ mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = 10^{-6}$ W/Hz . Dieses ist bandbegrenzt auf B_x = 20 kHz und wird auf einen Lautsprecher gegeben. Die gesamte Messeinrichtung ist für den Widerstandswert R = 50 Ω ausgelegt.

Das vom Mikrofon aufgenommene Signal ist im allgemeinsten Fall wie folgt beschreibbar:

$$y(t) = \sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu \cdot x(t - t_\mu).$$

Hierbei bezeichnen α_μ Dämpfungsfaktoren und t_μ Laufzeiten.

Bei dem hier gezeichneten Zweiwegemodell gilt M = 2: Zu dem direkten Pfad S_1 kommt hier der Umweg S_2 hinzu. Benutzen Sie für numerische Berechnungen die Parameterwerte

$$\alpha_1 = 0.5, \ \ t_1 = 200 \text{ ms}, \ \ , \alpha_2 = 0.1, \ \ t_2 = 250 \text{ ms}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 4.6.**

Fragebogen zu "Z4.14: Auffinden von Echos"

a) Geben Sie die AKF $\varphi_x(\tau)$ am Sender an. Wie lautet diese umgerechnet auf den Widerstand R = 1 Ω? Wie groß ist der Effektivwert σ_x?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ = V

b) Berechnen Sie die KKF $\varphi_{xy}(\tau)$ zwischen Sende– und Empfangssignal. Welche Werte ergeben sich für $\tau = 0$, $\tau = t_1$ und $\tau = t_2$?

$\boldsymbol{\varphi_{xy}(\tau = 0)}$ = V^2

$\boldsymbol{\varphi_{xy}(\tau = 200\text{ ms})}$ = V^2

$\boldsymbol{\varphi_{xy}(\tau = 250\text{ ms})}$ = V^2

c) Berechnen Sie das Kreuzleistungsdichtespektrum $\Phi_{xy}(f)$. Welcher Wert ergibt sich bei der Frequenz $f = 0$?

$\boldsymbol{\Phi_{xy}(f = 0)}$ = V^2/Hz

d) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend, wenn Sie anstelle der in (a) berechneten AKF die Näherung $\varphi_x(\tau) \approx N_0/2 \cdot \delta(\tau)$ verwenden?

- ☐ Das Rauschen ist nun „echt” weiß – also nicht bandbegrenzt.
- ☐ Die Rauschleistung wird gegenüber Punkt (a) vermindert.
- ☐ Die KKF ist die Summe gewichteter und verschobener Diracs.
- ☐ Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist wie unter (c) berechnet.

e) Berechnen Sie unter Verwendung der Näherung $\varphi_x(\tau) \approx N_0/2 \cdot \delta(\tau)$ die AKF $\varphi_y(\tau)$. Welche Gewichte ergeben sich bei $\tau = 0$ und $\tau = \Delta t = t_2 - t_1$?

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = 0)}$ = W/Hz

$\boldsymbol{\varphi_y(\tau = \Delta t)}$ = W/Hz

A4.15: WDF und Korrelationsmatrix

$$\mathbf{K_x} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_y} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Wir betrachten hier die dreidimensionale Zufallsgröße $\mathbf{x}$, deren allgemein dargestellte Kovarianzmatrix $\mathbf{K_x}$ in der Grafik oben angegeben ist. Die Zufallsgröße besitzt folgende Eigenschaften:

- Die drei Komponenten sind gaußverteilt und es gilt für die Elemente der Kovarianzmatrix:

  $$K_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}.$$

- Die Elemente auf der Hauptdiagonalen seien bekannt:

  $$K_{11} = 1, K_{22} = 0, K_{33} = 0.25.$$

- Der Korrelationskoeffizient zwischen den Koeffizienten x_1 und x_3 beträgt 0.8.

Im zweiten Teil der Aufgabe soll die Zufallsgröße $\mathbf{y}$ mit den beiden Komponenten y_1 und y_2 betrachtet werden, deren Kovarianzmatrix $\mathbf{K_y}$ durch die angegebenen Zahlenwerte (1, 0.4 und 0.25) bestimmt ist.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer mittelwertfreien Gaußschen zweidimensionalen Zufallsgröße $\mathbf{y}$ lautet gemäß den Angaben auf der Seite **Kovarianzmatrix und WDF** mit $N = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f_y}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)\cdot\sqrt{|\mathbf{K_y}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{y}^{\rm T}\cdot\mathbf{K_y}^{-1}\cdot\mathbf{y}\right) = \\ &= C\cdot\exp(-\gamma_1\cdot y_1^2 + \gamma_2\cdot y_2^2 + \gamma_{12}\cdot y_1\cdot y_2). \end{aligned}$$

In den Teilaufgaben (e) und (f) sollen der Vorfaktor C und die weiteren WDF-Koeffizienten γ_1, γ_2 und γ_{12} gemäß dieser Vektordarstellung berechnet werden. Dagegen würde die entsprechende Gleichung bei herkömmlicher Vorgehensweise entsprechend **Kapitel 4.2** lauten:

$$f_{y_1,\,y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{y_1 y_2}{\sigma_1\cdot\sigma_2}\right)\right].$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.7.** Einige Grundlagen zur Anwendung von Vektoren und Matrizen finden sich auf den folgenden Seiten:

Determinante einer Matrix,
Inverse einer Matrix.

Fragebogen zu "A4.15: WDF und Korrelationsmatrix"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Die Zufallsgröße **x** ist mit Sicherheit mittelwertfrei.
- [ ] Die Matrixelemente K_{12}, K_{21}, K_{23} und K_{32} sind 0.
- [ ] Es gilt $K_{31} = -K_{13}$.

b) Berechnen Sie das Matrixelement der letzten Zeile und ersten Spalte.

K_{31} =

c) Berechnen Sie die Determinante $|\mathbf{K_y}|$.

$|\mathbf{K_y}|$ =

d) Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathbf{I_y} = \mathbf{K_y}^{-1}$ mit den Matrixelementen I_{ij}:

I_{11} =

I_{12} =

I_{21} =

I_{22} =

e) Berechnen Sie den Vorfaktor C der 2D-WDF und vergleichen Sie das Ergebnis mit der entsprechenden Formel gemäß Kapitel 4.2.

C =

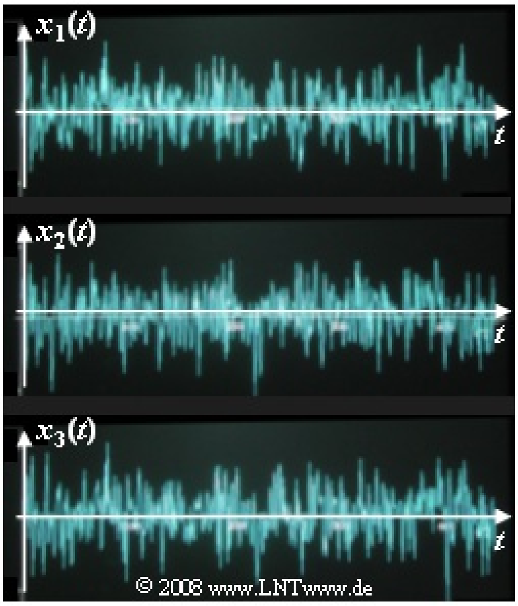
f) Bestimmen Sie die Koeffizienten im Argument der Exponentialfunktion. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der 2D–WDF–Gleichung.

γ_1 =

γ_2 =

γ_{12} =

Z4.15: Aussagen der Kovarianzmatrix



Gegeben seien die beiden Gaußschen Zufallsgrößen u und v, jeweils mittelwertfrei und mit Varianz $\sigma^2 = 1$. Daraus werden durch Linearkombination drei neue Zufallsgrößen gebildet:

$$x_1 = A_1 \cdot u + B_1 \cdot v,$$

$$x_2 = A_2 \cdot u + B_2 \cdot v,$$

$$x_3 = A_3 \cdot u + B_3 \cdot v.$$

Vorausgesetzt wird, dass in allen Fällen ($i = 1, 2, 3$) gilt:

$$A_i^2 + B_i^2 = 1.$$

In der Grafik sehen Sie drei Signalverläufe $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ entsprechend den Parametern

- $A_1 = B_2 = 1$,
- $B_1 = A_2 = 0$,
- $A_3 = 0.8$, $B_3 = 0.6$.

Dieser Parametersatz wird für die Teilaufgabe (c) vorausgesetzt.

Der Korrelationskoeffizient ρ_{ij} zwischen den Zufallsgrößen x_i und x_j wird wie folgt angegeben:

$$\rho_{ij} = \frac{A_i \cdot A_j + B_i \cdot B_j}{\sqrt{(A_i^2 + B_i^2)(A_j^2 + B_j^2)}} = A_i \cdot A_j + B_i \cdot B_j.$$

Unter der hier implizit getroffenen Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ lautet die Kovarianzmatrix **K**, die bei mittelwertfreien Zufallsgrößen identisch mit der Korrelationsmatrix **R** ist:

$$\mathbf{K} = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.7.** Einige Grundlagen zur Anwendung von Vektoren und Matrizen finden sich auf den folgenden Seiten:

Determinante einer Matrix,
Inverse einer Matrix.

Fragebogen zu "Z4.15: Aussagen der Kovarianzmatrix"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend? Begründung.

- [ ] **K** kann geeigneter Wahl von A_1, ... , B_3 eine Diagonalmatrix sein. Oder anders ausgedrückt: $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$ ist möglich.
- [ ] Bei geeigneter Wahl der Parameter A_1, ... , B_3 kann genau einer der Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} gleich 0 sein.
- [ ] Bei geeigneter Wahl der Parameter A_1, ... , B_3 können genau zwei der Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} gleich 0 sein.
- [ ] Bei geeigneter Wahl der Parameter A_1, ... , B_3 können alle drei Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} ungleich 0 sein.

b) Wie lauten die Matrixelemente mit $A_1 = A_2 = –A_3$ und $B_1 = B_2 = –B_3$?

$\boldsymbol{\rho_{12}}$ =

$\boldsymbol{\rho_{13}}$ =

$\boldsymbol{\rho_{23}}$ =

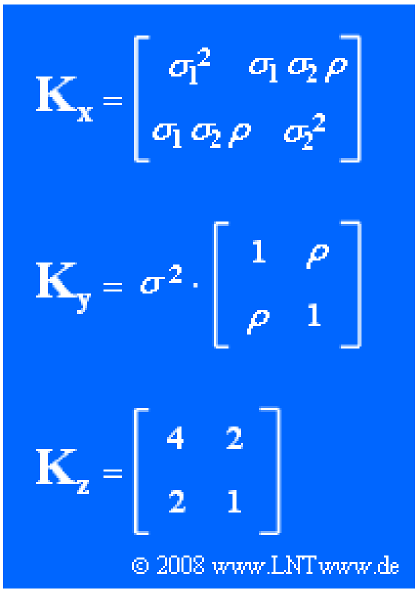
c) Berechnen Sie die Koeffizienten ρ_{ij} für den in der Grafik dargestellten Fall, also für $A_1 = 1$, $B_1 = 0$; $A_2 = 0$, $B_2 = 1$; $A_3 = 0.8$, $B_3 = 0.6$.

$\boldsymbol{\rho_{12}}$ =

$\boldsymbol{\rho_{13}}$ =

$\boldsymbol{\rho_{23}}$ =

A4.16: Eigenwerte und Eigenvektoren



Obwohl die Beschreibung Gaußscher Zufallsgrößen mit Hilfe von Vektoren und Matrizen eigentlich nur bei mehr als $N = 2$ Dimensionen erforderlich ist und Sinn macht, beschränken wir uns hier auf den Sonderfall zweidimensionaler Zufallsgrößen.

In der Grafik ist oben die allgemeine Korrelationsmatrix $\mathbf{K_x}$ der 2D–Zufallsgröße $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\rm T}$ angegeben, wobei σ_1^2 und σ_2^2 die Varianzen der Einzelkomponenten beschreiben. ρ bezeichnet den Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Komponenten.

Die Zufallsgrößen **y** und **z** geben zwei Spezialfälle von **x** an, deren Prozessparameter aus den Kovarianzmatrizen $\mathbf{K_y}$ und $\mathbf{K_z}$ bestimmt werden können.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.7.** Einige Grundlagen zur Anwendung von Vektoren und Matrizen finden sich auf den folgenden Seiten:

Determinante einer Matrix,
Inverse einer Matrix.

Weiterhin ist zu beachten:

- Eine 2×2-Kovarianzmatrix besitzt zwei reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2.
- Die beiden Eigenwerte bestimmen zwei Eigenvektoren ξ_1 und ξ_2 und diese spannen ein neues Koordinatensystem in Richtung der Hauptachsen des alten Systems auf.
- Entsprechend der Seite **Höhenlinien bei korrelierten Zufallsgrößen** ist der Winkel α zwischen dem alten und dem neuen System durch folgende Gleichung gegeben:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan(2 \cdot \rho \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}).$$

Fragebogen zu "A4.16: Eigenwerte und Eigenvektoren"

a) Welche Aussagen treffen für die Kovarianzmatrix $\mathbf{K_y}$ zu?

- [ ] $\mathbf{K_y}$ beschreibt alle möglichen 2D-Zufallsgrößen mit $\sigma_1 = \sigma_2$.
- [ ] Der Wertebereich des Parameters ρ ist $-1 \le \rho \le 1$.
- [ ] Der Wertebereich des Parameters ρ ist $0 < \rho < 1$.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{K_y}$ unter der Bedingung $\sigma = 1$, $\rho = 0$.

λ_1 =

λ_2 =

c) Geben Sie die Eigenwerte von $\mathbf{K_y}$ unter der Bedingung $\sigma = 1$, $0 < \rho < 1$ an. Welche Werte ergeben sich für $\rho = 0.5$, wobei $\lambda_1 \ge \lambda_2$ vorausgesetzt wird?

λ_1 =

λ_2 =

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{\eta}_1$ und $\boldsymbol{\eta}_2$. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] $\boldsymbol{\eta}_1$ und $\boldsymbol{\eta}_2$ liegen in Richtung der Ellipsenhauptachsen.
- [ ] Die neuen Koordinaten sind um 45° gedreht.
- [ ] Die Streuungen bezüglich des neuen Systems sind λ_1 und λ_2.

e) Wie lauten die Kenngrößen der durch $\mathbf{K_z}$ festgelegten Zufallsgröße $\mathbf{z}$?

σ_1 =

σ_2 =

ρ =

f) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und $\lambda_2 < \lambda_1$ der Kovarianzmatrix $\mathbf{K_z}$.

λ_1 =

λ_2 =

g) Um welchen Winkel α ist das neue Koordinatensystem (ζ_1, ζ_2) gegenüber dem ursprünglichen System $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ gedreht?

α = Grad

Z4.16: 2D- und 3D-Datenreduktion

$$\mathbf{K_y} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_z} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wir betrachten Gaußsche mittelwertfreie Zufallsgrößen **x**, **y** und **z** mit den Dimensionen $N = 1$, $N = 2$ und $N = 3$:

- Die eindimensionale Zufallsgröße **x** ist durch die Varianz $\sigma^2 = 1$ bzw. die Streuung $\sigma = 1$ charakterisiert. Wegen der Dimension $N = 1$ gilt $\mathbf{x} = x$.
- Der Korrelationskoeffizient zwischen den Komponenten y_1 und y_2 der 2D-Zufallsgröße **y** beträgt $\rho = 1/3$ (siehe Matrix $\mathbf{K_y}$). y_1 und y_2 weisen ebenfalls die Streuung $\sigma = 1$ auf.
- Die Statistik der dreidimensionalen Zufallsgröße **z** ist durch die Korrelationsmatrix $\mathbf{K_z}$ vollständig bestimmt.

Quantisiert man die Zufallsgröße x im Bereich zwischen –4 und +4 mit Intervallbreite $\Delta_x = 1/32$, so gibt es insgesamt $N_1 = 256$ unterschiedliche Quantisierungswerte, für deren Übertragung somit $n_1 = 8$ Bit benötigt würden.

Analog ergeben sich bei der Zufallsgröße **y** insgesamt $N_2 = 256^2 = 65536$ unterschiedliche quantisierte Wertepaare, wenn man die Korrelation zwischen y_1 und y_2 nicht berücksichtigt. Durch Ausnutzung dieser Korrelation – zum Beispiel durch Koordinatentransformation vom Ursprungsystem (y_1, y_2) zum neuen System (η_1, η_2) – ergibt sich eine geringere Zahl N_2' quantisierter Wertepaare.

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass jede Komponente entsprechend ihrer jeweiligen Streuung (σ_1 bzw. σ_2) im Bereich von $-4\sigma_i$ bis $+4\sigma_i$ zu quantisieren ist und die Quantisierungsintervalle in beiden Richtungen gleich sein sollen: $\Delta_x = \Delta_y = 1/32$.

Den Quotienten N_2'/N_2 bezeichnen wir als Datenreduktionsfaktor bezüglich der 2D-Zufallsgröße **y**. In analoger Definition ist N_3'/N_3 der entsprechende Reduktionsfaktor der 3D-Zufallsgröße **z** für $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1/32$. Anzumerken ist, dass in beiden Fällen ein möglichst kleiner Wert günstig ist.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Eigenwerte und Eigenvektoren** im Kapitel 4.7. Die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte von $\mathbf{K_z}$ lautet:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{24}{9}\lambda - \frac{20}{27} = 0.$$

Eine der drei Lösungen dieser Gleichung ist $\lambda_1 = 5/3$.

Fragebogen zu "Z4.16: 2D- und 3D-Datenreduktion"

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Korrelationsmatrix $\mathbf{K_y}$. Es gelte $\lambda_1 \ge \lambda_2$.

λ_1 =

λ_2 =

b) Wie groß ist der Datenreduktionsfaktor bei der 2D-Zufallsgröße $\mathbf{y}$?

N_2'/N_2 =

c) Es gelte $\lambda_1 = 5/3$. Berechnen Sie die Eigenwerte λ_2 und $\lambda_3 \le \lambda_2$ von $\mathbf{K_z}$.

λ_2 =

λ_3 =

d) Wie groß ist der Datenreduktionsfaktor bei der 3D-Zufallsgröße $\mathbf{z}$?

N_3'/N_3 =