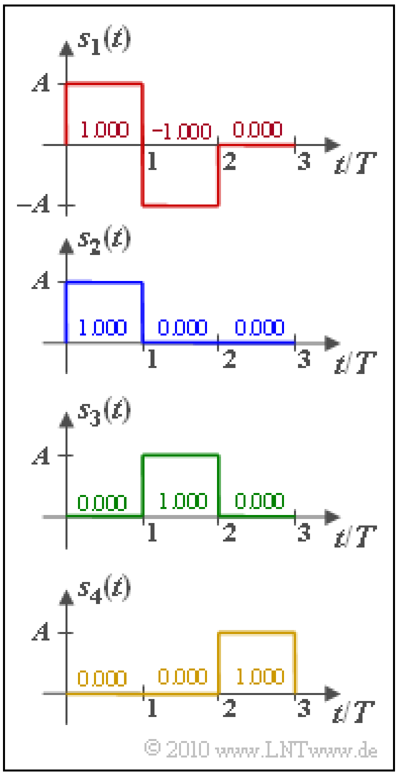
A4.1: Gram-Schmidt-Verfahren



Für die vier durch die Abbildung definierten Signale $s_1(t)$, ... , $s_4(t)$ sind durch Anwendung des sog. Gram-Schmidt-Verfahrens die drei sich ergebenden Basisfunktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ zu ermitteln, so dass für die Signale mit $i = 1, ... , 4$ geschrieben werden kann:

$$s_i(t) = s_{i1} \cdot \varphi_1(t) + s_{i2} \cdot \varphi_2(t) + s_{i3} \cdot \varphi_3(t)\,.$$

In der Teilaufgabe a) gelte $A^2 = 1$ mW und $T = 1$ µs. In den späteren Teilaufgaben sind die Amplitude und die Zeit jeweils normierte Größen: $A = 1$, $T = 1$. Damit sind sowohl die Koeffizienten s_{ij} als auch die Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ – jeweils mit $j = 1, 2, 3$ – dimensionslose Größen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich inhaltlich auf **Kapitel 4.1.** Auf der Seite 3a des Kapitels ist das **Gram–Schmidt–Verfahren** angegeben, auf der Seite 3b finden Sie ein **Berechnungsbeispiel** ähnlich zu dieser Aufgabe.

Fragebogen zu "A4.1: Gram-Schmidt-Verfahren"

a) Welche Einheiten besitzen die folgenden Größen mit A^2 = 1 mW und T = 1 µs?

- [ ] Die Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ sind dimensionslos.
- [ ] Die Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ haben die Einheit $\text{s}^{-0.5}$.
- [ ] Die Koeffizienten s_{ij} sind dimensionslos.
- [ ] Die Koeffizienten s_{ij} haben die Einheit $(\text{Ws})^{0.5}$.

b) Führen Sie den ersten Schritt des Gram–Schmidt–Verfahrens durch. Wie für die weiteren Teilaufgaben gelte A = 1 und T = 1.

s_{11} =

s_{12} =

s_{13} =

c) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_2(t)$ mit A = 1 und T = 1?

s_{21} =

s_{22} =

s_{23} =

d) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_3(t)$ mit A = 1 und T = 1?

s_{31} =

s_{32} =

s_{33} =

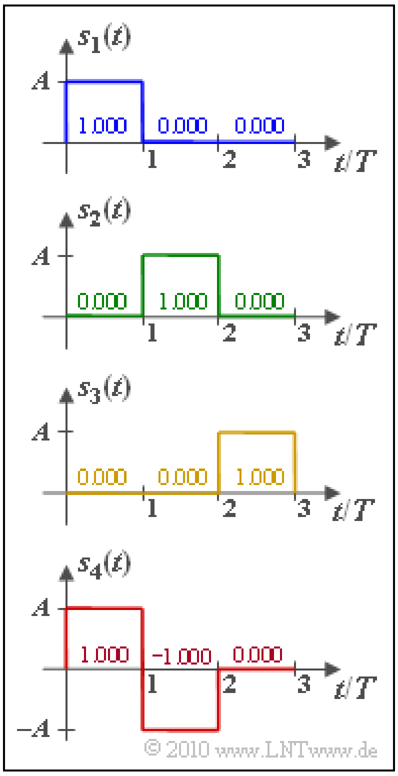
e) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_4(t)$ mit A = 1 und T = 1?

s_{41} =

s_{42} =

s_{43} =

Z4.1: Andere Basisfunktionen



Diese Aufgabe verfolgt das genau gleiche Ziel wie die **Aufgabe A4.1.** Für M = 4 energiebegrenzte Signale $s_i(t)$ mit i = 1, ... , 4 sollen die N erforderlichen orthonormalen Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ gefunden werden, die folgende Bedingung erfüllen müssen:

$$<\varphi_j(t),\ \varphi_k(t)> \ = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(t) \cdot \varphi_k(t)\,{\rm d}t = \ = \delta_{jk} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.\quad \begin{array}{c} j = k \\ j \ne k \end{array} .$$

Für M Sendesignale $s_i(t)$ können bereits weniger Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ ausreichen, nämlich N. Allgemein gilt also $N \le M$.

Es handelt sich hier um die genau gleichen energiebegrenzten Signale $s_i(t)$ wie in der Aufgabe A4.1. Der Unterschied ist die unterschiedliche Reihenfolge der Signale $s_i(t)$. Diese sind in dieser Aufgabe so sortiert, dass die Basisfunktionen auch ohne Anwendung des umständlicheren **Gram–Schmidt–Verfahrens** gefunden werden können.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1.** Verwenden Sie für numerische Berechnungen:

$$A = 1 \sqrt{\rm W},\ \ T = 1\,{\rm \mu s}.$$

Fragebogen zu "Z4.1: Andere Basisfunktionen"

a) In Aufgabe A4.1 hat das Gram–Schmidt–Verfahren zu N = 3 Basisfunktionen geführt. Wieviele Basisfunktionen benötigt man hier?

$\boldsymbol{N}$ =

b) Geben Sie die 2–Norm aller Signale an.

$||\boldsymbol{s_1(t)}||$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

$||\boldsymbol{s_2(t)}||$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

$||\boldsymbol{s_3(t)}||$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

$||\boldsymbol{s_4(t)}||$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

c) Welche Aussagen gelten für die Basisfunktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$?

- ☐ Die in A4.1 berechneten Basisfunktionen sind auch hier geeignet.
- ☐ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$.
- ☐ Ein möglicher Satz lautet $\{\varphi_j(t)\} = \{s_j(t)\}$, mit j = 1, 2, 3.
- ☐ Ein möglicher Satz lautet $\{\varphi_j(t)\} = \{s_j(t)/K\}$, mit j = 1, 2, 3.

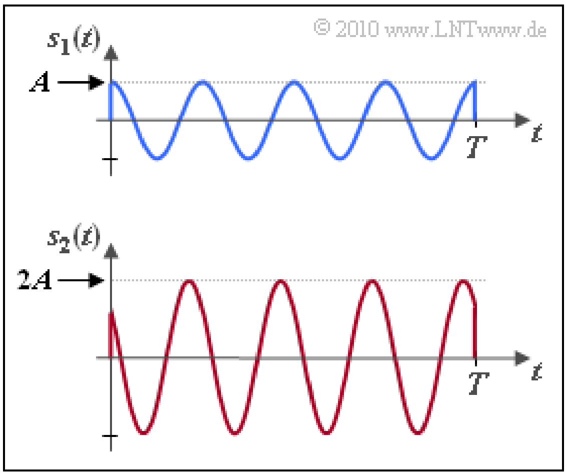
d) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_4(t)$, bezogen auf die Basisfunktionen $\{\varphi_j(t)\} = \{s_j(t)/K\}$, mit j = 1, 2, 3?

$\boldsymbol{s_{41}}$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{42}}$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{43}}$ = $(\text{Ws})^{0.5}$

A4.2: AM/PM-Schwingungen



Wir betrachten verschiedene Signalmengen $\{s_i(t)\}$ mit der Laufvariablen $i = 1, \ldots, M$, die alle in gleicher Weise dargestellt werden können:

$$s_i(t) = \\ = \begin{cases} A_i \cdot \cos(2\pi f_{\rm T} t + \phi_i) & 0 \le t < T, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Signaldauer T ist dabei ein ganzzahliges Vielfaches von $1/f_{\rm T}$, wobei $f_{\rm T}$ die Signalfrequenz (Trägerfrequenz) angibt.

Für die Skizze beträgt die Dauer der energiebegrenzten Signale jeweils $T = 4/f_{\rm T}$, das heißt, man erkennt jeweils genau vier Schwingungen innerhalb von T. Die einzelnen Signale $s_i(t)$ unterscheiden sich in der Amplitude (A_i) und/oder der Phase (ϕ_i). Für die beiden ersten (in der Grafik dargestellten) Signale gilt:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cdot \cos(2\pi f_{\rm T} t), \\ s_2(t) &= 2A \cdot \cos(2\pi f_{\rm T} t + \pi/4). \end{aligned}$$

Beschränkt man sich zunächst auf diese beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$, so kann man diese durch die Basisfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ vollständig beschreiben. Diese sind orthonormal zueinander, das heißt, unter Berücksichtigung der Zeitbegrenzung auf T gilt:

$$\int_0^T \varphi_1^2(t)\,{\rm d}t = \int_0^T \varphi_2^2(t)\,{\rm d}t = 1, \quad \int_0^T \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)\,{\rm d}t = 0.$$

Mit diesen Basisfunktionen lassen sich die beiden Signale wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{11} \cdot \varphi_1(t), \\ s_2(t) &= s_{21} \cdot \varphi_1(t) + s_{22} \cdot \varphi_2(t). \end{aligned}$$

In der Teilaufgabe g) soll überprüft werden, ob sich alle Signale $s_i(t)$ gemäß der obigen Definition (mit beliebiger Amplitude A_i und beliebiger Phase ϕ_i) durch die folgende Gleichung beschreiben lassen:

$$s_i(t) = s_{i1} \cdot \varphi_1(t) + s_{i2} \cdot \varphi_2(t).$$

Die Basisfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ sollen hier durch das **Gram–Schmidt–Verfahren** gefunden werden, das im Theorieteil ausführlich beschrieben wurde. Die erforderlichen Gleichungen sind hier nochmals zusammengestellt:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{||s_1(t)||} \quad \text{mit} \quad s_{11} = ||s_1(t)|| = \sqrt{\int_0^T s_1^2(t)\,{\rm d}t},$$

$$s_{21} = \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle = \int_0^T s_2(t) \cdot \varphi_1(t)\,{\rm d}t,$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) - s_{21} \cdot \varphi_1(t), \quad \varphi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{||\theta_2(t)||}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1.** Verwenden Sie zur Abkürzung die Energie $E = 1/2 \cdot A^2 \cdot T$. Desweiteren ist die folgende trigonometrische Beziehung gegeben:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

Fragebogen zu "A4.2: AM/PM-Schwingungen"

a) Wie groß ist die Energie und die 2–Norm des Signals $s_1(t)$, ausgedrückt mit E?

$\boldsymbol{E_1}$ = $\cdot\ E$

$\|\boldsymbol{s_1(t)}\|$ = $\cdot\ E^{0.5}$

b) Wie lautet die Basisfunktion $\varphi_1(t)$ nach Gram–Schmidt?

- [ ] $\varphi_1(t) = E^{0.5} \cdot \cos(2\pi f_\text{T} t)$,
- [ ] $\varphi_1(t) = \cos(2\pi f_\text{T} t)$,
- [ ] $\varphi_1(t) = (2/T)^{0.5} \cdot \cos(2\pi f_\text{T} t)$.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $s_1(t)$ und $\varphi_1(t)$?

- [ ] $s_1(t) = E^{0.5} \cdot \varphi_1(t)$,
- [ ] $s_1(t) = A \cdot \varphi_1(t)$,
- [ ] $s_1(t) = (T/2)^{0.5} \cdot \varphi_1(t)$.

d) Wie lautet das innere Produkt $s_{21} = \langle s_2(t) \cdot \varphi_1(t)\rangle$?

$\boldsymbol{s_{21}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

e) Wie lautet die Hilfsfunktion $\theta_2(t)$?

- [ ] $\theta_2(t) = +\ 2^{0.5} \cdot A \cdot \sin(2\pi f_\text{T} t)$,
- [ ] $\theta_2(t) = -\ 2^{0.5} \cdot A \cdot \sin(2\pi f_\text{T} t)$,
- [ ] $\theta_2(t) = (2/T)^{0.5} \cdot \sin(2\pi f_\text{T} t)$.

f) Geben Sie die Koeffizienten von $s_2(t) = s_{21} \cdot \varphi_1(t) + s_{22} \cdot \varphi_2(t)$ an.

$\boldsymbol{s_{21}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{22}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

g) Welche der Aussagen gelten allgemein für die Basisfunktionen der Signalmenge $\{s_i(t)\}$ mit $i = 1, \ldots , M$, wenn M sehr viel größer als 2 ist?

- [ ] Die Anzahl der Basisfunktionen ist stets $N = M$.
- [ ] Die Anzahl der Basisfunktionen ist stets $N = 2$.

- [ ] Mögliche Basisfunktionen sind Cosinus und (Minus–)Sinus.

Z4.2: Achtstufiges *Phase Shift Keying*

Die $M = 8$ möglichen Sendesignale bei 8–PSK lauten mit $i = 0, \ldots, 7$ im Bereich $0 \le t < T$:

$$s_i(t) = A \cdot \cos(2\pi f_\mathrm{T} t + i \cdot \pi/4)\,.$$

Außerhalb der Symboldauer T sind die Signale $s_i(t)$ alle gleich 0.

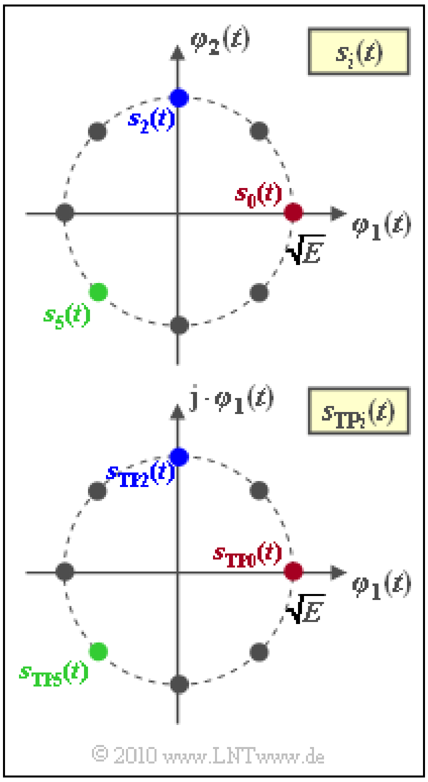
In der **Aufgabe A4.2** wurde gezeigt, dass diese Signalmenge durch die Basisfunktionen

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_\mathrm{T} t)\,,$$
$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \cdot \sin(2\pi f_\mathrm{T} t)$$

wie folgt dargestellt werden kann ($i = 0, \ldots, 7$):

$$s_i(t) = s_{i1} \cdot \varphi_1(t) + s_{i2} \cdot \varphi_2(t)\,.$$

Die äquivalente Tiefpassdarstellung der Signale $s_i(t)$ lautet nach dem **Blockschaltbild** in Kapitel 4.3 des Buches „Modulationsverfahren”:



$$s_{\mathrm{TP}i}(t) = a_i \cdot g_s(t)\,, \quad a_i = a_{\mathrm{I}i} + \mathrm{j} \cdot a_{\mathrm{Q}i}\,, \quad i = 0, \ldots, 7\,,$$

wobei a_i komplexe dimensionslose Koeffizienten sind und die Energie des Sendegrundimpulses $g_s(t)$ im Tiefpassbereich E_{gs} beträgt. Im hier dargestellten Fall beschreibt $g_s(t)$ einen Rechteckimpuls, doch kann für $g_s(t)$ auch ein jeder andere energiebegrenzte Impuls verwendet werden.

Die Grafik zeigt die Signalraumdarstellung der 8–PSK für das Bandpass–Signal (oben) sowie für das äquivalente Tiefpass–Signal (unten). Man erkennt daraus, dass sich die beiden Darstellungen nur durch die verwendeten Basisfunktionen unterscheiden, wobei $\varphi_1(t)$ in der oberen und der unteren Grafik für unterschiedliche Funktionen steht. In der Tiefpassdarstellung gilt $\varphi_2(t) = \mathrm{j} \cdot \varphi_1(t)$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1.** Im Gegensatz zum Theorieteil und zur **Aufgabe A4.2** Im Gegensatz zum Theorieteil und zur Aufgabe A4.2 kann hier die Laufvariable i die Werte $0, \ldots, M-1$ annehmen. Verwenden Sie zur Abkürzung

$$E = A^2 \cdot T/2\,.$$

Fragebogen zu "Z4.2: Achtstufiges *Phase Shift Keying*"

a) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_0(t)$?

$\boldsymbol{s_{01}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{02}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

b) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_2(t)$?

$\boldsymbol{s_{21}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{22}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

c) Wie lauten die Koeffizienten des Signals $s_5(t)$?

$\boldsymbol{s_{51}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

$\boldsymbol{s_{52}}$ = $\cdot\ E^{0.5}$

d) Durch welche Basisfunktionen sind die TP–Signale $s_{\mathrm{TP}i}(t)$ darstellbar? Durch

- [ ] eine komplexe Basisfunktion $\xi_1(t)$,
- [ ] zwei komplexe Basisfunktionen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$,
- [ ] zwei reelle Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\psi_1(t)$.

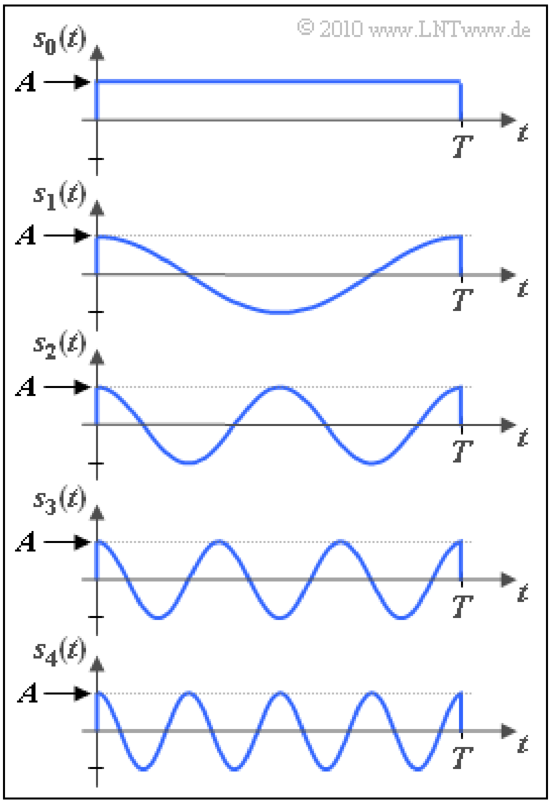
e) Wie lauten im vorliegenden Fall die reellen Basisfunktionen?

- [ ] $\varphi_1(t) = g_s(t)$,
- [ ] $\varphi_1(t) = g_s(t)/E_{gs}{}^{0.5}$,
- [ ] $\psi_1(t) = \varphi_1(t)$,
- [ ] $\psi_1(t) = \mathrm{j} \cdot \varphi_1(t)$.

f) Es gelte $s_{\mathrm{TP0}}(t) = E^{\,0.5}$. Was trifft zu:

- ○ Die Energie E bezieht sich auf das Tiefpass–Signal.
- ○ Die Energie E bezieht sich auf das Bandpass–Signal.

A4.3: Unterschiedliche Frequenzen



In der Grafik sind $M = 5$ Signale $s_i(t)$ dargestellt. Entgegen der Nomenklatur im Theorieteil sind für die Laufvariable i die Werte 0, ... , M–1 möglich. Anzumerken ist:

- Alle Signale sind zeitbegrenzt auf 0 bis T; damit ist auch die Energie aller Signale endlich.
- Das Signal $s_1(t)$ hat die Periodendauer $T_0 = T$. Die Frequenz ist damit gleich $f_0 = 1/T$.
- Die Signale $s_i(t)$, $i \neq 0$, sind Cosinusschwingungen mit der Frequenz $i \cdot f_0$. Dagegen ist $s_0(t)$ zwischen 0 und T konstant.
- Der Maximalwert aller Signale ist A und es gilt

$$|s_i(t)| \leq A\,.$$

Gesucht sind in dieser Aufgabe die N Basisfunktionen, die hier entgegen der bisherigen Beschreibung im Theorieteil mit j = 0, ... , N–1 durchnummeriert werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.3: Unterschiedliche Frequenzen"

a) Beschreiben Sie die Signalmenge $\{s_i(t)\}$, $0 \le i \le 4$ möglichst kompakt. Welche Beschreibungsform ist richtig?

- ☐ $s_i(t) = A \cdot \cos(2\pi i \cdot t/T)$.
- ☐ $s_i(t) = A \cdot \cos(2\pi i \cdot t/T)$ für $0 \le t < T$, sonst 0.
- ☐ $s_i(t) = A \cdot \cos(2\pi t/T - i \cdot \pi/2)$ für $0 \le t < T$, sonst 0.

b) Geben Sie die Anzahl N der erforderlichen Basisfunktionen an.

$\boldsymbol{N}$ =

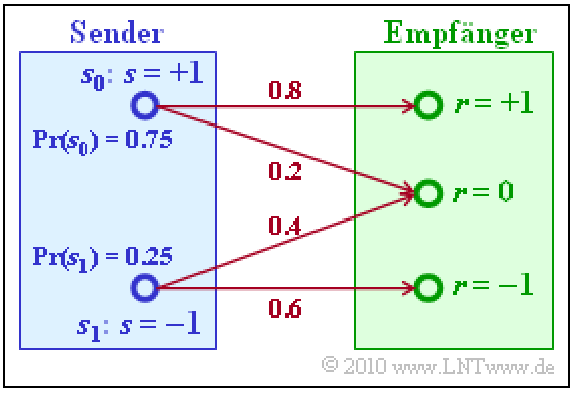
c) Wie lautet die Basisfunktion $\varphi_0(t)$, die formgleich mit $s_0(t)$ ist?

- ☐ $\varphi_0(t) = s_0(t)$,
- ☐ $\varphi_0(t) = (1/T)^{0.5}$ für $0 \le t < T$, außerhalb 0.
- ☐ $\varphi_0(t) = (2/T)^{0.5}$ für $0 \le t < T$, außerhalb 0.

d) Wie lautet die Basisfunktion $\varphi_1(t)$, die formgleich mit $s_1(t)$ ist?

- ☐ $\varphi_1(t) = s_1(t)$,
- ☐ $\varphi_1(t) = (1/T)^{0.5} \cdot \cos(2\pi t/T)$ für $0 \le t < T$, sonst 0,
- ☐ $\varphi_1(t) = (2/T)^{0.5} \cdot \cos(2\pi t/T)$ für $0 \le t < T$, sonst 0.

A4.4: MAP– und ML–Empfänger



Zur Verdeutlichung von MAP– und ML–Entscheidung konstruieren wir nun ein sehr einfaches Beispiel mit nur zwei möglichen Nachrichten $m_0 = 0$ und $m_1 = 1$, die durch die Signalwerte s_0 bzw. s_1 dargestellt werden:

$$s \;=\; s_0 = +1 \quad\Longleftrightarrow\quad m = m_0 = 0\,,$$
$$s \;=\; s_1 = -1 \quad\Longleftrightarrow\quad m = m_1 = 1\,.$$

Die Auftrittswahrscheinlichkeiten sind:

$$\Pr(s = s_0) = 0.75, \;\; \Pr(s = s_1) = 0.25\,.$$

Das Empfangssignal kann – warum auch immer – drei verschiedene Werte annehmen, nämlich

$$r = +1, \;\; r = 0, \;\; r = -1\,.$$

Die bedingten Kanalwahrscheinlichkeiten können der Grafik entnommen werden.

Nach der Übertragung soll die gesendete Nachricht durch einen optimalen Empfänger geschätzt werden. Zur Verfügung stehen:

- der **Maximum–Likelihood–Empfänger** (ML–Empfänger), der die Auftrittswahrscheinlichkeiten $\Pr(s = s_i)$ nicht kennt, mit der Entscheidungsregel:

$$\hat{m}_{\rm ML} = \arg \max_i \,[p_{r|s}(\rho|s_i)]\,,$$

- der **Maximum–a–posteriori–Empfänger** (MAP–Empfänger); dieser berücksichtigt bei seinem Entscheidungsprozess auch die Symbolwahrscheinlichkeiten der Quelle:

$$\hat{m}_{\rm MAP} = \arg \max_i \,[\Pr(s = s_i) \cdot p_{r|s}(\rho|s_i)]\,.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.7** sowie das **Kapitel 4.2** des vorliegenden Buches. Die notwendigen statistischen Grundlagen finden Sie im **Kapitel 1.3** des Buches „Stochastische Signaltheorie".

Fragebogen zu "A4.4: MAP– und ML–Empfänger"

a) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die Empfangswerte auf?

Pr(r = +1) =

Pr(r = –1) =

Pr(r = 0) =

b) Berechnen Sie alle Rückschlusswahrscheinlichkeiten.

Pr(s_0 | r = +1) =

Pr(s_1 | r = +1) =

Pr(s_0 | r = –1) =

Pr(s_1 | r = –1) =

Pr(s_0 | r = 0) =

Pr(s_1 | r = 0) =

c) Unterscheiden sich MAP– und ML–Empfänger für r = +1?

- ja,
- nein.

d) Unterscheiden sich MAP– und ML–Empfänger für r = –1?

- ja,
- nein.

e) Welche Aussagen gelten unter der Voraussetzung „r = 0”?

- [ ] Der MAP–Empfänger entscheidet sich für s_0.
- [ ] Der MAP–Empfänger entscheidet sich für s_1.
- [ ] Der ML–Empfänger entscheidet sich für s_0.
- [ ] Der ML–Empfänger entscheidet sich für s_1.

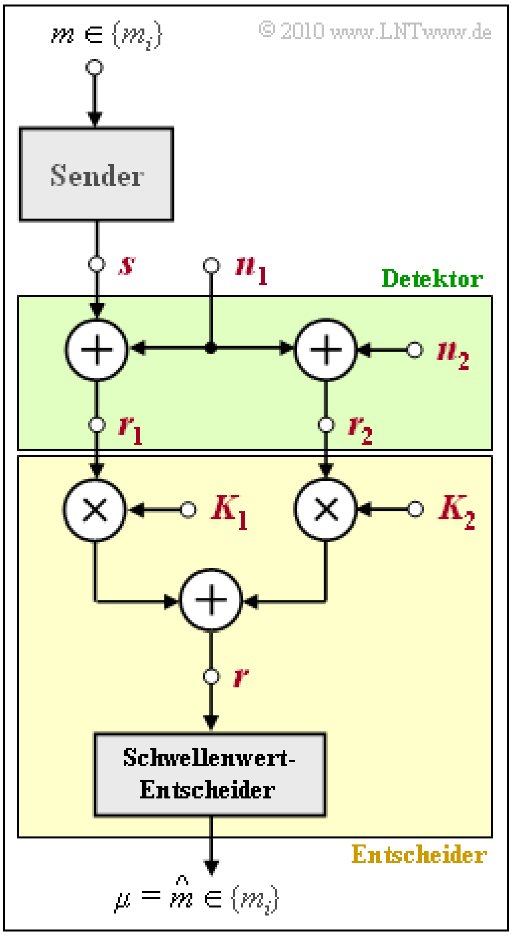
f) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit des ML–Empfängers.

ML: Pr(Symbolfehler) =

g) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit des MAP–Empfängers.

MAP: Pr(Symbolfehler) =

A4.5: Theorem der Irrelevanz



Untersucht werden soll das durch die Grafik vorgegebene Kommunikationssystem. Die binäre Nachricht $m \in \{m_0, m_1\}$ mit gleichen Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$\Pr(m_0) = \Pr(m_1) = 0.5$$

wird durch die beiden Signale

$$s_0 = \sqrt{E_s}\,, \quad s_1 = -\sqrt{E_s}$$

dargestellt, wobei die Zuordnungen $m_0 \Leftrightarrow s_0$ und $m_1 \Leftrightarrow s_1$ eineindeutig sind. Der Detektor (im Bild grün hinterlegt) liefert zwei Entscheidungswerte

$$\begin{aligned} r_1 &= s + n_1\,, \\ r_2 &= n_1 + n_2\,, \end{aligned}$$

aus denen der Entscheider die Schätzwerte $\mu \in \{m_0, m_1\}$ für die gesendete Nachricht m bildet. Der Entscheider beinhaltet zwei Gewichtungsfaktoren K_1 und K_2, eine Summationsstelle und einen Schwellenwertentscheider mit der Schwelle bei 0.

Betrachtet werden in dieser Aufgabe drei Auswertungen:

- Entscheidung basierend auf r_1 $(K_1 \ne 0,\ K_2 = 0)$,
- Entscheidung basierend auf r_2 $(K_1 = 0,\ K_2 \ne 0)$,
- gemeinsame Auswertung von r_1 und r_2 $(K_1 \ne 0,\ K_2 \ne 0)$.

Die zwei Rauschquellen n_1 und n_2 seien voneinander unabhängig und auch unabhängig vom Sendesignal $s \in \{s_0, s_1\}$. n_1 und n_2 können jeweils durch AWGN–Rauschquellen (weiß, gaußverteilt, mittelwertfrei, Varianz $\sigma^2 = N_0/2$) modelliert werden. Verwenden Sie für numerische Berechnungen die Werte

$$E_s = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{Ws}\,, \quad N_0 = 10^{-6}\ \text{W/Hz}\,.$$

Die **komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion** liefert folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \text{Q}(0) &= 0.5\,, & \text{Q}(2^{0.5}) = 0.786 \cdot 10^{-1}\,, \qquad \text{Q}(2) = 0.227 \cdot 10^{-1}\,, \\ \text{Q}(2 \cdot 2^{0.5}) &= 0.234 \cdot 10^{-2}\,, & \text{Q}(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}\,, \quad \text{Q}(4 \cdot 2^{0.5}) = 0.771 \cdot 10^{-8}\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabe bezeiht sich auf das **Kapitel 4.2** dieses Buches. Insbesondere wird hier auf das **Theorem der Irrelevanz** Bezug genommen, daneben aber auch auf den **Optimalen Empfänger für den AWGN–Kanal:**

Weitere Informationen zu den für diese Aufgabe relevanten Themen finden Sie unter den folgenden Links:

- **Entscheidungsregeln für MAP– und ML–Empfänger,**
- **Realisierung als Korrelationsempfänger bzw. Matched–Filter–Empfänger,**
- **Bedingte Gaußsche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.**

Für die Fehlerwahrscheinlichkeit eines Systems $r = s + n$ (wegen $N = 1$ sind hier s, n, r Skalare) gilt

$$p_\mathrm{S} = \mathrm{Pr}(\mathrm{Symbolfehler}) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2E_s/N_0}\right) ,$$

wobei ein binäres Nachrichtensignal $s \in \{s_0, s_1\}$ mit

$$s_0 = \sqrt{E_s}\,, \quad s_1 = -\sqrt{E_s}$$

vorausgesetzt wird und die zweiseitige Rauschleistungsdichte von n konstant gleich $\sigma^2 = N_0/2$ ist.

Fragebogen zu "A4.5: Theorem der Irrelevanz"

a) Welche Aussagen gelten hier bezüglich des Empfängers?

- ○ Der ML–Empfänger ist hier besser als der MAP–Empfänger.
- ○ Der MAP–Empfänger ist hier besser als der ML–Empfänger.
- ○ Beide Empfänger liefern hier das gleiche Ergebnis.

b) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $K_2 = 0$?

K_2 = 0: Pr(Symbolfehler) =

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $K_1 = 0$?

K_1 = 0: Pr(Symbolfehler) =

d) Kann durch die Verwendung von r_1 **und** r_2 eine Verbesserung erzielt werden?

- ○ Ja.
- ○ Nein.

e) Welche Gleichungen gelten für den Schätzwert (μ) bei AWGN–Rauschen?

- ☐ $\mu = \arg\min\,[(\rho_1 + \rho_2) \cdot s_i]$,
- ☐ $\mu = \arg\min\,[(\rho_2 - 2\rho_1) \cdot s_i]$,
- ☐ $\mu = \arg\max\,[(\rho_1 - \rho_2/2) \cdot s_i]$.

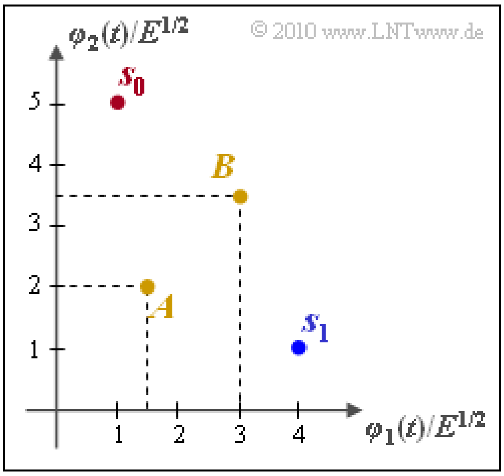
f) Wie kann diese Regel mit dem vorgegebenen Entscheider (Schwelle bei 0) exakt umgesetzt werden? Es gelte $K_1 = 1$.

K_2 =

g) Welche (minimale) Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit der Realisierung entsprechend der Teilaufgabe f)?

Minimum [Pr(Symbolfehler)] =

A4.6: Optimale Entscheidungsgrenze



Wir betrachten ein binäres Nachrichtensystem (M = 2), das durch die gezeichnete 2D–Signalraumkonstellation (N = 2) festliegt. Für die beiden möglichen Sendevektoren, die mit den Nachrichten m_0 und m_1 direkt gekoppelt sind, gilt:

$$\boldsymbol{s}_0 = \sqrt{E} \cdot (1,\ 5) \iff m_0\,,$$
$$\boldsymbol{s}_1 = \sqrt{E} \cdot (4,\ 1) \iff m_1\,.$$

Gesucht ist jeweils die optimale Entscheidungsgrenze zwischen den Regionen $I_0 \Leftrightarrow m_0$ und $I_1 \Leftrightarrow m_1$, wobei von folgenden Voraussetzungen ausgegangen wird:

- Für die Teilaufgaben a) bis c) gilt
  $$\Pr(m_0) = \Pr(m_1) = 0.5\,.$$
- Für die Teilaufgaben d) und e) soll dagegen gelten:
  $$\Pr(m_0) = 0.817\,, \ \Pr(m_1) = 0.183 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\Pr(m_0)}{\Pr(m_1)} = 1.5\,.$$

Bei AWGN–Rauschen mit der Varianz $\sigma_n^{\ 2}$ ist die Entscheidungsgrenze die Lösung der folgenden vektoriellen Gleichung hinsichtlich des Vektors (ρ_1, ρ_2):

$$||\boldsymbol{s}_1||^2 - ||\boldsymbol{s}_0||^2 + 2 \cdot \sigma_n^2 \cdot \ln \frac{\Pr(m_0)}{\Pr(m_1)} = 2 \cdot \boldsymbol{\rho}^{\rm T} \cdot (\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_0)\,, \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\ \rho_2)\,.$$

Zusätzlich sind in der Grafik zwei Empfangswerte

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{E} \cdot (1.5,\ 2)\,, \quad \boldsymbol{B} = \sqrt{E} \cdot (3,\ 3.5)$$

eingezeichnet. Es ist zu überprüfen, ob diese bei den entsprechenden Randbedingungen den Regionen I_0 (und damit der Nachricht m_0) oder I_1 (Nachricht m_1) zugeordnet werden sollten.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.3** dieses Buches. Für numerische Berechnungen kann zur Vereinfachung die Energie E = 1 gesetzt werden.

Fragebogen zu "A4.6: Optimale Entscheidungsgrenze"

a) Wo liegt die optimale Entscheidergrenze bei gleichwahrscheinlichen Symbolen?

- [ ] $\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 9/8$,
- [ ] $\rho_2 = -4/3 \cdot \rho_1 + 19/3$,
- [ ] $\rho_2 = 3$.

b) Zu welchem Entscheidungsgebiet gehört der Empfangswert $\boldsymbol{A} = (1.5,\ 2)$?

- ○ Zum Entscheidungsgebiet I_0,
- ○ zum Entscheidungsgebiet I_1.

c) Zu welchem Entscheidungsgebiet gehört der Empfangswert $\boldsymbol{B} = (3,\ 3.5)$?

- ○ Zum Entscheidungsgebiet I_0,
- ○ zum Entscheidungsgebiet I_1.

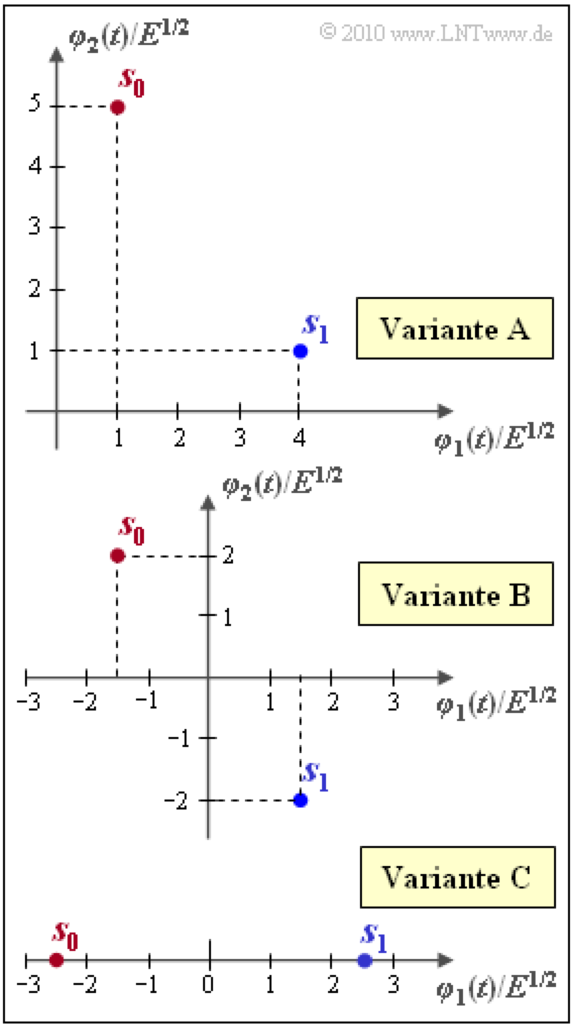
d) Wie lautet die Gleichung der Entscheidungsgeraden für $\text{Pr}(m_0) = 0.817$, $\sigma_n = 1$?

- [ ] $\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 9/8$,
- [ ] $\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 3/4$,
- [ ] $\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 3/2$.
- [ ] $\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1$.

e) Welche Entscheidungen werden mit diesen neuen Regionen I_0 und I_1 getroffen?

- [ ] Der Empfangsvektor $\boldsymbol{A}$ wird als Nachricht m_0 interpretiert.
- [ ] Der Empfangsvektor $\boldsymbol{A}$ wird als Nachricht m_1 interpretiert.
- [ ] Der Empfangsvektor $\boldsymbol{B}$ wird als Nachricht m_0 interpretiert.
- [ ] Der Empfangsvektor $\boldsymbol{B}$ wird als Nachricht m_1 interpretiert.

Z4.6: Signalraumkonstellationen



Die (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit eines optimalen Binärsystems lautet:

$$p_{\rm S} = {\rm Pr}(\mathcal{E}) = {\rm Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right).$$

Hierzu ist anzumerken:

- ${\rm Q}(x)$ bezeichnet die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion (Definition und Approximation):
$$\begin{aligned}{\rm Q}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty {\rm e}^{-u^2/2}\,{\rm d}u \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot {\rm e}^{-x^2/2}.\end{aligned}$$
- d gibt den Abstand der beiden Sendesignalpunkte $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$ im vorgegebenen Vektorraum an:
$$d = \sqrt{||\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_0||^2}.$$
- $\sigma_n^{\ 2}$ ist die Varianz des AWGN–Rauschens nach dem Detektor, der zum Beispiel als Matched–Filter realisiert sein kann. Es gelte $\sigma_n^{\ 2} = N_0/2$.

Durch die Grafik sind drei unterschiedliche Signalraumkonstellationen gegeben, nämlich

- Variante A: $\boldsymbol{s}_0 = (+1,\ +5)$, $\boldsymbol{s}_1 = (+4,\ +1)$,
- Variante B: $\boldsymbol{s}_0 = (–1.5,\ +2)$, $\boldsymbol{s}_1 = (+1.5,\ –2)$,
- Variante C: $\boldsymbol{s}_0 = (–2.5,\ 0)$, $\boldsymbol{s}_1 = (+2.5,\ 0)$.

Die jeweils mittlere Energie pro Symbol ($E_{\rm S}$) kann nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$E_{\rm S} = {\rm Pr}(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0)\cdot ||\boldsymbol{s}_0||^2 + {\rm Pr}(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1)\cdot ||\boldsymbol{s}_1||^2.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.3.** Wenn bei einer Teilaufgabe keine anderslautende Angabe gemacht ist, so kann von gleichwahrscheinlichen Symbolen ausgegangen werden:

$${\rm Pr}(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0) = {\rm Pr}(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1) = 0.5.$$

Die Normierungsenergie E ist hier stillschweigend zu 1 gesetzt.

Fragebogen zu "Z4.6: Signalraumkonstellationen"

a) Welche Voraussetzungen müssen unbedingt (auf jeden Fall) erfüllt sein, damit die angegebene Fehlerwahrscheinlichkeitsgleichung gilt?

- [ ] additives weißes Gaußsches Rauschen mit Varianz $\sigma_n{}^2$,
- [ ] optimaler Binärempfänger,
- [ ] Entscheidungsgrenze in der Mitte zwischen den Symbolen,
- [ ] gleichwahrscheinliche Symbole $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$.

b) Welche Aussage gilt für die Fehlerwahrscheinlichkeit mit $\sigma_n{}^2 = E$?

- [ ] Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit tritt bei Variante A auf.
- [ ] Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit tritt bei Variante B auf.
- [ ] Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit tritt bei Variante C auf.
- [ ] Alle Varianten zeigen gleiches Fehlerverhalten.

c) Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit für die Variante A mit $\sigma_n{}^2 = E$ an. Sie können Q(x) entsprechend der Näherung berechnen.

$\sigma_n{}^2 = E$, Variante A: $p_{\rm S}$ =

d) Es gelte $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ W/Hz, $E_{\rm S} = 6.25 \cdot 10^{-6}$ Ws. Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für die Variante C bei gleichwahrscheinlichen Symbolen?

Variante C: $p_{\rm S}$ =

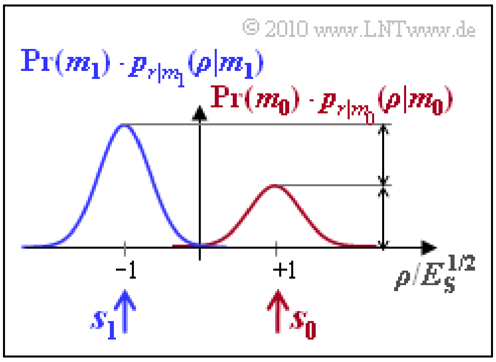
e) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei gleichen Voraussetzungen für die Variante B?

Variante B: $p_{\rm S}$ =

f) Wie groß ist bei der Variante A die mittlere Energie pro Symbol ($E_{\rm S}$) zu wählen, um die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie bei System C zu erhalten?

Variante A: $E_{\rm S}$ = Ws

A4.7: Nochmals Entscheidungsgrenzen



Wir betrachten ein Übertragungssystem mit

- nur einer Basisfunktion ($N = 1$),
- zwei Signalen $s_0 = E_s^{1/2}$ und $s_1 = -E_s^{1/2}$ ($M = 2$),
- einem AWGN–Kanal mit Varianz $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Da in dieser Aufgabe der allgemeine Fall $\mathrm{Pr}(m_0) \ne \mathrm{Pr}(m_1)$ behandelt wird, genügt es nicht, die bedingten Dichtefunktionen $p_{r|m_i}(\rho|m_i)$ zu betrachten. Vielmehr müssen diese noch mit den Symbolwahrscheinlichkeiten $\mathrm{Pr}(m_i)$ multipliziert werden (für i sind hier die Werte 0 und 1 einzusetzen).

Liegt die Entscheidungsgrenze zwischen den beiden Regionen I_0 und I_1 bei $G = 0$, also in der Mitte zwischen $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$, so ist die Fehlerwahrscheinlichkeit unabhängig von den Auftrittswahrscheinlichkeiten $\mathrm{Pr}(m_0)$ und $\mathrm{Pr}(m_1)$:

$$p_\mathrm{S} = \mathrm{Pr}(\mathcal{E}) = \mathrm{Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) .$$

Hierbei gibt d den Abstand zwischen den Signalpunkten s_0 und s_1 an und $d/2$ dementsprechend den jeweiligen Abstand von s_0 bzw. s_1 von der Entscheidungsgrenze $G = 0$. Der Effektivwert (Wurzel aus der Varianz) des AWGN–Rauschens ist σ_n.

Sind dagegen die Auftrittswahrscheinlichkeiten unterschiedlich ⇒ $\mathrm{Pr}(m_0) \ne \mathrm{Pr}(m_1)$, so kann durch eine Verschiebung der Entscheidergrenze G eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt werden:

$$p_\mathrm{S} = \mathrm{Pr}(m_1) \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n} \cdot (1+\gamma)\right) + \mathrm{Pr}(m_0) \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n} \cdot (1-\gamma)\right) ,$$

wobei die Hilfsgröße γ wie folgt definiert ist:

$$\gamma = 2 \cdot \frac{\sigma_n^2}{d^2} \cdot \ln \frac{\mathrm{Pr}(m_1)}{\mathrm{Pr}(m_0)} , \quad G_\mathrm{opt} = \gamma \cdot E_\mathrm{S}^{1/2} .$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.3.** Die Werte der Q–Funktion können Sie mit folgendem Interaktionsmodul ermitteln:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Fragebogen zu "A4.7: Nochmals Entscheidungsgrenzen"

a) Wie groß sind die der Grafik zugrundeliegenden Symbolwahrscheinlichkeiten, wenn die blaue Gaußkurve genau doppelt so hoch ist wie die rote?

Pr(m_0) =

Pr(m_1) =

b) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit mit der Rauschvarianz $\sigma_n^2 = E_S/9$ und der Entscheidergrenze $G = 0$?

$G = 0$: p_S =

c) Wie lautet die optimale Schwelle für die gegebenen Wahrscheinlichkeiten?

G_{opt} = $\cdot E_s^{1/2}$

d) Wie groß ist nun die Fehlerwahrscheinlichkeit?

$G = G_{opt}$: p_S =

e) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten erhält man mit der Rauschvarianz $\sigma_n^2 = E_S$?

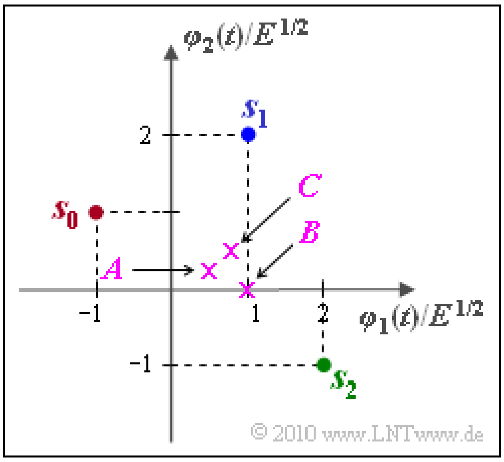
$G = 0$: p_S =

$G = G_{opt}$: p_S =

f) Welche Aussagen gelten für die Rauschvarianz $\sigma_n^2 = 4 \cdot E_S$?

- ☐ Mit $G = 0$ ist die Fehlerwahrscheinlichkeit größer als 30%.
- ☐ Die optimale Entscheiderschwelle liegt rechts von s_0.
- ☐ Bei optimaler Schwelle ist die Fehlerwahrscheinlichkeit etwa 27%.
- ☐ Der Schätzwert m_0 ist nur mit Rauschen möglich.

A4.8: Entscheidungsregionen



Wir betrachten in dieser Aufgabe eine Signalraumkonstellation im zweidimensionalen Raum ($N = 2$) mit der Signalmenge

$$\boldsymbol{s}_0 = (-1, 1)\,,\;\; \boldsymbol{s}_1 = (1, 2)\,,\;\; \boldsymbol{s}_2 = (2, -1)\,,$$

jeweils bezogen auf den Normierungswert $E^{1/2}$.

Gesucht sind hierzu die Entscheidungsregionen I_0, I_1 und I_2, wobei folgende Gesichtspunkte zu beachten sind:

- Die Region I_i soll den Signalraumpunkt $\boldsymbol{s}_i$ beinhalten ($i = 0, 1, 2$).
- Die Signale $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{s}_2$ sind gleichwahrscheinlich.
- Die Regionen sollen so bestimmt werden, dass sich beispielsweise für den AWGN–Kanal die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt.

Mit diesen Voraussetzungen sind die Entscheidergrenzen G_{ik} zwischen den Regionen I_i und I_k jeweils Gerade, die genau in der Mitte zwischen $\boldsymbol{s}_i$ und $\boldsymbol{s}_k$ verlaufen ($i = 0, 1, 2$, $k = 0, 1, 2$, $i \ne k$).

Mit Kreuzen sind in obige Grafik drei Empfangswerte

$$\boldsymbol{A} = (0.50,\; 0.25)\,,\;\; \boldsymbol{B} = (1,\; 0)\,,\;\; \boldsymbol{C} = (0.75,\; 0.50)$$

eingezeichnet, die in der Teilaufgabe e) jeweils einer Region I_i zugeordnet werden sollen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.3.** Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nachfolgend verwendet:

$$x = \varphi_1(t)/\sqrt{E}\,,\;\; y = \varphi_2(t)/\sqrt{E}\,.$$

Fragebogen zu "A4.8: Entscheidungsregionen"

a) Wie lautet die Gleichung der Entscheidungsgrenze G_{01}?

- [ ] $y = 3/2 – 2 \cdot x$,
- [ ] $y = x/3$,
- [ ] $y = –3/4 + 3/2 \cdot x$.

b) Wie lautet die Gleichung der Entscheidungsgrenze G_{02}?

- [ ] $y = 3/2 – 2 \cdot x$,
- [ ] $y = x/3$,
- [ ] $y = –3/4 + 3/2 \cdot x$.

c) Wie lautet die Gleichung der Entscheidungsgrenze G_{12}?

- [ ] $y = 3/2 – 2 \cdot x$,
- [ ] $y = x/3$,
- [ ] $y = –3/4 + 3/2 \cdot x$.

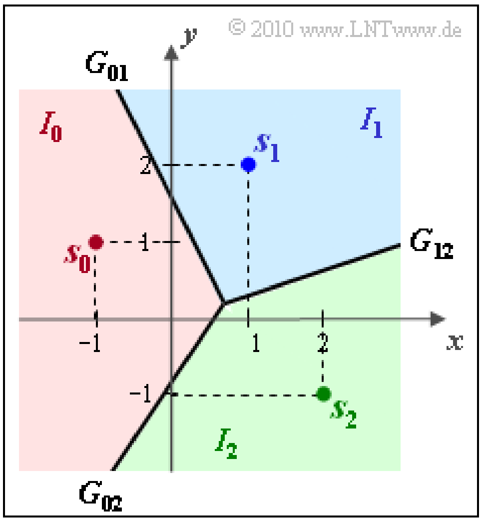
d) Skizzieren Sie die drei Entscheidungsregionen I_0, I_1 und I_2. Schneiden sich die Entscheidungsgrenzen G_{01}, G_{02} und G_{12} in einem Punkt?

- ○ ja,
- ○ nein.

e) Welche der folgenden Entscheidungen sind richtig?

- [ ] $\boldsymbol{A} = (0.5, 0.25)$ gehört zur Region I_0.
- [ ] $\boldsymbol{B} = (1, 0)$ gehört zur Region I_2.
- [ ] $\boldsymbol{C} = (0.75, 0.5)$ gehört zur Region I_1.

Z4.8: Fehlerwahrscheinlichkeit



Die Grafik zeigt die genau gleiche Signalraumkonstellation wie in der **Aufgabe A4.8:**

- die M = 3 möglichen Sendesignale, nämlich

$$\boldsymbol{s}_0 = (-1,\ 1)\,,\quad \boldsymbol{s}_1 = (1,\ 2)\,,\quad \boldsymbol{s}_2 = (2,\ -1)\,.$$

- die M = 3 Entscheidungsgrenzen

$$\begin{aligned} G_{01}: y &= 1.5 - 2 \cdot x\,,\\ G_{02}: y &= -0.75 + 1.5 \cdot x\,,\\ G_{12}: y &= x/3\,. \end{aligned}$$

Die beiden Achsen des 2D–Signalraums sind hier vereinfachend mit x und y bezeichnet; eigentlich müsste hierfür $\varphi_1(t)/E^{1/2}$ bzw. $\varphi_2(t)/E^{1/2}$ geschrieben werden.

Diese Entscheidungsgrenzen sind optimal unter den Voraussetzungen

- gleichwahrscheinliche Symbolwahrscheinlichkeiten,
- zirkulär–symmetrische WDF des Rauschens (z.B. AWGN).

In dieser Aufgabe betrachten wir dagegen für die Rausch–WDF eine zweidimensionale Gleichverteilung:

$$p_{\boldsymbol{n}}(x,\ y) = \begin{cases} K & \text{für } |x| < A,\ |y| < A\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Ein solches amplitudenbegrenztes Rauschen ist zwar ohne jede praktische Bedeutung. Es ermöglicht jedoch eine Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung ohne umfangreiche Integrale, aus der das Prinzip der Vorgehensweise erkennbar wird.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themenkomplex von **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "Z4.8: Fehlerwahrscheinlichkeit"

a) Welchen Wert besitzt die Konstante K für A = 0.75?

$\boldsymbol{K}$ =

b) Welche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit A = 0.75?

$\boldsymbol{A}$ **= 0.75:** $\boldsymbol{p_{\rm S}}$ =

c) Welche Aussagen sind für A = 1 zutreffend?

- [ ] Alle Nachrichten m_i werden in gleicher Weise verfälscht.
- [ ] Die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit Pr(Fehler | m_0) = 1/64.
- [ ] Die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit Pr(Fehler | m_1) = 0.
- [ ] Die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit Pr(Fehler | m_2) = 0.

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt mit Pr(m_0) = Pr(m_1) = Pr(m_2) = 1/3?

$\boldsymbol{A}$ **= 1; alle 1/3:** $\boldsymbol{p_{\rm S}}$ =

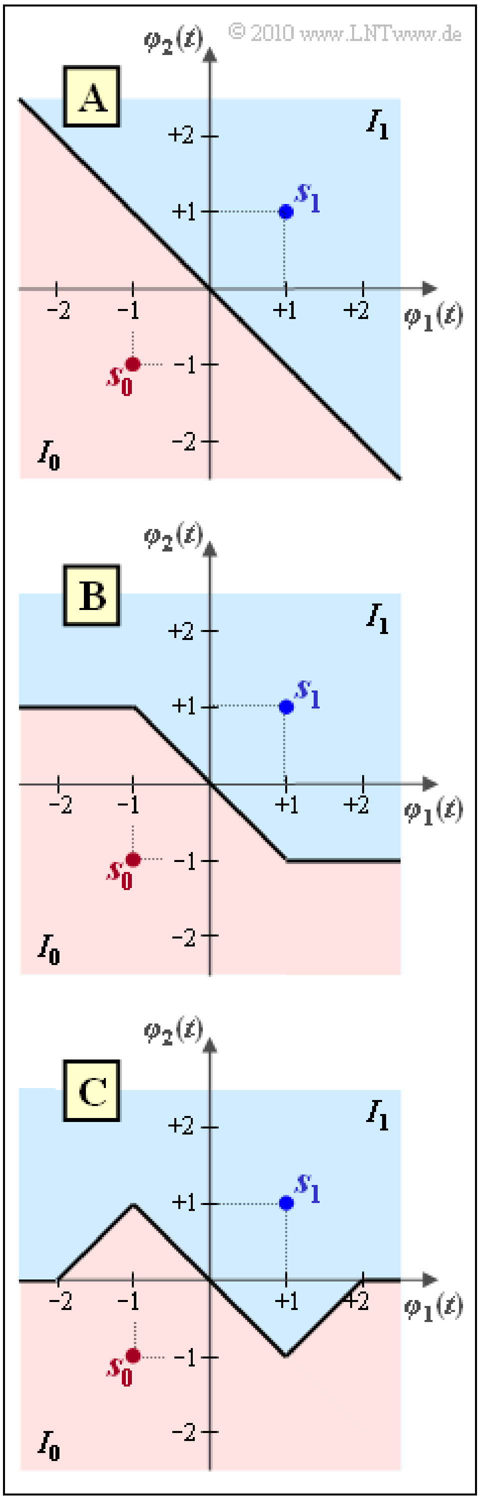
e) Wie ist die Fehlerwahrscheinlichkeit mit Pr(m_0) = Pr(m_1) = 1/4, Pr(m_2) = 1/2?

$\boldsymbol{A}$ **= 1; 1/4, 1/4, 1/2:** $\boldsymbol{p_{\rm S}}$ =

f) Könnte man durch Festlegung anderer Regionen ein besseres Ergebnis erzielen?

- ○ ja,
- ○ nein.

A4.9: Entscheidungsregionen bei Laplace



Wir betrachten ein Übertragungssystem, basierend auf den Basisfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Die zwei gleichwahrscheinlichen Sendesignale sind durch die Signalpunkte

$$\boldsymbol{s}_0 = (-\sqrt{E},\ -\sqrt{E}),\quad \boldsymbol{s}_1 = (+\sqrt{E},\ +\sqrt{E})$$

gegeben. Im Folgenden normieren wir zur Vereinfachung den Energieparameter zu $E = 1$ und erhalten somit:

$$\boldsymbol{s}_0 = (-1,\ -1) \iff m_0,$$
$$\boldsymbol{s}_1 = (+1,\ +1) \iff m_1.$$

Die Nachrichten m_0 und m_1 sind den so festgelegten Signalen $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$ eindeutig zugeordnet.

Die zwei Rauschkomponenten $n_1(t)$ und $n_2(t)$ seien unabhängig voneinander und jeweils laplace–verteilt mit Parameter $a = 1$:

$$p_{n_1}(\eta_1) = 1/2 \cdot {\rm e}^{-|\eta_1|},\quad p_{n_2}(\eta_2) = 1/2 \cdot {\rm e}^{-|\eta_2|}$$
$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{p_n}(\eta_1, \eta_2) = 1/4 \cdot {\rm e}^{-|\eta_1|-|\eta_2|}.$$

Die Eigenschaften eines solchen Laplace–Rauschens werden in der **Aufgabe Z4.9** noch eingehend behandelt.

Das Empfangssignal $\boldsymbol{r}$ setzt sich additiv aus dem Sendesignal $\boldsymbol{s}$ und dem Rauschsignal $\boldsymbol{n}$ zusammen:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{r} = (r_1, r_2),$$
$$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2),\quad \boldsymbol{n} = (n_1, n_2).$$

Die entsprechenden Realisierungen sind wie folgt bezeichnet:

$$\boldsymbol{s}\ :\ (s_{01}, s_{02})\ \text{bzw.}\ (s_{11}, s_{12}),$$
$$\boldsymbol{r}\ :\ (\rho_1, \rho_2),\quad \boldsymbol{n}\ :\ (\eta_1, \eta_2).$$

Die Entscheidungsregel des MAP– und des ML–Empfängers (beide sind aufgrund der gleichen Symbolwahrscheinlichkeiten identisch) lauten:

Entscheide für das Symbol m_0, falls

$$p_{\boldsymbol{r}\,|\,m}(\rho_1, \rho_2|m_0) > p_{\boldsymbol{r}\,|\,m}(\rho_1, \rho_2|m_1).$$

Mit den weiteren Voraussetzungen kann hierfür (Entscheidung für m_0) auch geschrieben werden:

$$1/4 \cdot \exp\left[-|\rho_1+1| - |\rho_2+1|\,\right] > 1/4 \cdot \exp\left[-|\rho_1-1| - |\rho_2-1|\,\right]$$
$$\Rightarrow\quad |\rho_1+1| + |\rho_2+1| < |\rho_1-1| + |\rho_2-1|$$
$$\Rightarrow\quad L(\rho_1, \rho_2) = |\rho_1+1| + |\rho_2+1| - |\rho_1-1| - |\rho_2-1| < 0.$$

Auf diese Funktion $L(\rho_1, \rho_2)$ wird in den nachfolgenden Aufgaben häufig Bezug genommen.

Die Grafik zeigt drei verschiedene Entscheidungsregionen (I_0, I_1). Bei AWGN–Rauschen wäre nur die obere Variante *A* optimal. Auch beim hier betrachteten Laplace–Rauschen führt die Variante *A* zur kleinstmöglichen Fehlerwahrscheinlichkeit, siehe **Aufgabe Z4.9:**

$$p_{\rm min} = {\rm Pr}(\mathcal{E}\,|\,{\rm optimaler\ Empf\ddot{a}nger}) = {\rm e}^{-2} \approx 13.5\,\%\,.$$

Zu untersuchen ist, ob die Variante *B* bzw. die Variante *C* ebenfalls optimal ist, das heißt, ob auch deren Fehlerwahrscheinlichkeiten kleinstmöglich gleich $p_{\rm min}$ sind.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die letzten Theorieseiten von **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "A4.9: Entscheidungsregionen bei Laplace"

a) Welche der Entscheidungsregeln sind richtig? Entscheide für m_0, falls

- ☐ $p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_0) > p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_1)$,
- ☐ $L(\rho_1, \rho_2) = |\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| + |\rho_2 + 1| - |\rho_2 - 1| < 0$,
- ☐ $L(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 + \rho_2 \ge 0$.

b) Wie lässt sich der Ausdruck $|x + 1| - |x - 1|$ umformen?

- ☐ Für $x \ge 1$ ist $|x + 1| - |x - 1| = 2$.
- ☐ Für $x \le -1$ ist $|x + 1| - |x - 1| = -2$.
- ☐ Für $-1 \le x \le 1$ ist $|x + 1| - |x - 1| = 2x$.

c) Wie lautet die Entscheidungsregel im Bereich $-1 \le \rho_1 \le +1$, $-1 \le \rho_2 \le +1$?

- ☐ Entscheidung für m_0, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.
- ☐ Entscheidung für m_1, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.

d) Wie lautet die Entscheidungsregel im Bereich $\rho_1 > +1$?

- ☐ Entscheidung für m_0 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_1 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_0 nur, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.

e) Wie lautet die Entscheidungsregel im Bereich $\rho_1 < -1$?

- ☐ Entscheidung für m_0 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_1 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_0 nur, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.

f) Wie lautet die Entscheidungsregel im Bereich $\rho_2 > +1$?

- ☐ Entscheidung für m_0 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_1 im gesamten Bereich.
- ☐ Entscheidung für m_0 nur, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.

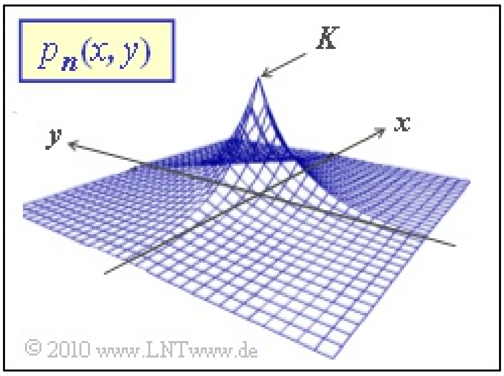
g) Wie lautet die Entscheidungsregel im Bereich $\rho_2 < -1$?

- [ ] Entscheidung für m_0 im gesamten Bereich.
- [ ] Entscheidung für m_1 im gesamten Bereich.
- [ ] Entscheidung für m_0 nur, falls $\rho_1 + \rho_2 < 0$.

h) Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Die Variante A führt zur minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit.
- [ ] Die Variante B führt zur minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit.
- [ ] Die Variante C führt zur minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit.

Z4.9: Laplace-verteiltes Rauschen



Wir betrachten zweidimensionales Rauschen $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$. Die beiden Rauschvariablen sind „*independent and identically distributed*”, abgekürzt i.i.d., und besitzen beide jeweils eine Laplace–Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p_{n_1}(x) \;=\; K \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot |x|}\,,$$
$$p_{n_2}(y) \;=\; K \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot |y|}\,.$$

Die 2D–Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_{\boldsymbol{n}}(x, y)$ ist in der Grafik dargestellt. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden hier die Realisierungen von n_1 und n_2 mit x und y bezeichnet.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.3.** Beachten Sie bitte, dass in Teilaufgabe f) das sich ergebende Integral aufgrund der Betragsbildung in mehrere Teilintegrale aufgespalten werden muss. Weiterhin gilt:

$$\int_0^\infty x^2 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}\,\mathrm{d}x = 2/a^3\,.$$

Fragebogen zu "Z4.9: Laplace-verteiltes Rauschen"

a) Wie groß ist die Konstante K der 1D–WDF?

- ☐ $K = 1$,
- ☐ $K = a/2$,
- ☐ $K = 1/a$.

b) Es sei $a = 1$. Wie groß sind der Mittelwert $E[n_i]$ und die Varianz $\sigma^2 = E[n_i^2]$ der beiden 1D–Zufallsgrößen? ($i = 1, 2$)

$\mathbf{E[n_i]}$ =

$\sigma^2 = \mathbf{E[n_i^2]}$ =

c) Welche Form haben die Höhenlinien der 2D–WDF im ersten Quadranten?

- ☐ Es sind Geraden.
- ☐ Es sind Hyperbeln.
- ☐ Es sind Kreise.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl n_1 als auch n_2 negativ sind?

$a = 1$: $\Pr[(n_1 < 0) \cap (n_2 < 0)]$ =

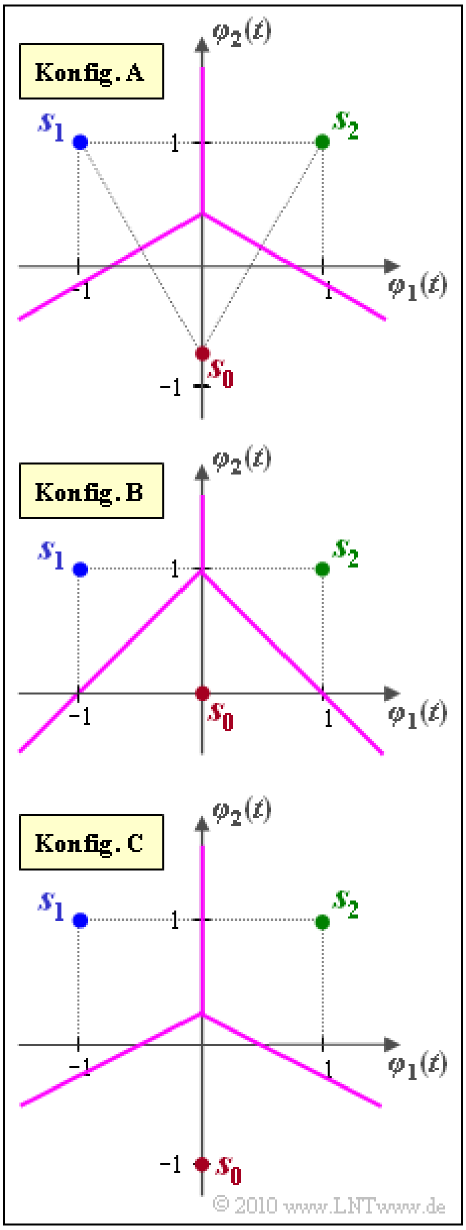
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass n_1 und n_2 jeweils größer als 1 sind?

$a = 1$: $\Pr[(n_1 > 1) \cap (n_2 > 1)]$ =

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $n_1 + n_2 > 2$ ist?

$a = 1$: $\Pr[n_1 + n_2 > 2]$ =

A4.10: Union Bound



Die so genannte „Union Bound" gibt eine obere Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeit eines nichtbinären Übertragungssystems ($M > 2$) an. Die tatsächliche (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit ist allgemein wie folgt gegeben:

$$\mathrm{Pr}(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{M-1} \mathrm{Pr}(m_i) \cdot \mathrm{Pr}(\mathcal{E}\,|\,m_i),$$

$$\mathrm{Pr}(\mathcal{E}\,|\,m_i) = \mathrm{Pr}\left[\bigcup_{k \ne i} \mathcal{E}_{ik}\right], \quad \text{wobei}$$

$$\mathcal{E}_{ik}: \boldsymbol{r} \text{ liegt näher bei } \boldsymbol{s}_k \text{ als beim Sollwert } \boldsymbol{s}_i.$$

Die einfachere Union Bound liefert eine obere Schranke für die Verfälschungswahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung, dass die Nachricht m_i (bzw. das Signal $\boldsymbol{s}_i$) gesendet wurde:

$$p_{\mathrm{UB}\,|\,\boldsymbol{s}_i} \ge \mathrm{Pr}(\mathcal{E}\,|\,\boldsymbol{s}_i) = \mathrm{Pr}(\mathcal{E}\,|\,m_i),$$

$$p_{\mathrm{UB}\,|\,\boldsymbol{s}_i} = \sum_{k=0,\ k\ne i}^{M-1} \mathrm{Pr}(\mathcal{E}_{ik}) = \sum_{k=0,\ k\ne i}^{M-1} \mathrm{Q}\left(\frac{d_{ik}/2}{\sigma_n}\right).$$

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet:

- $\mathrm{Q}(x)$ ist die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion,
- d_{ik} bezeichnet den Abstand der Signalpunkte $\boldsymbol{s}_i$ und $\boldsymbol{s}_k$,
- σ_n gibt der Effektivwert (⇒ Wurzel aus der Varianz) des additiven weißen Gaußschen Rauschens an.

Durch Mittelung über alle möglichen Signale $\boldsymbol{s}_i$ kommt man dann zur eigentlichen Union Bound:

$$p_{\mathrm{UB}} = \sum_{i=0}^{M-1} \mathrm{Pr}(\boldsymbol{s}_i) \cdot p_{\mathrm{UB}\,|\,\boldsymbol{s}_i} \ge \mathrm{Pr}(\mathcal{E}).$$

Die Grafik zeigt drei verschiedene Signalraumkonstellationen mit jeweils $M = 3$ Signalpunkten $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{s}_2$ im zweidimensionalen Raum ($N = 2$). Die Basisfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ sind geeignet normiert. Somit sind auch die Signalraumkoordinaten reine Zahlenwerte ohne Einheit:

$$\boldsymbol{s}_1 = (-1,\ +1), \quad \boldsymbol{s}_2 = (+1,\ +1).$$

Der Signalraumpunkt $\boldsymbol{s}_0$ in der Konfiguration A liegt so, dass $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ ein gleichseitiges Dreieck beschreiben. Bei der Konfiguration B und C gilt dagegen $\boldsymbol{s}_0 = (0,\ 0)$ bzw. $\boldsymbol{s}_0 = (0, -1)$. Verwenden Sie für alle Berechnungen den AWGN–Effektivwert $\sigma_n = 0.5$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.3.** Gegeben sind folgende Werte der komplementären Gaußschen Fehlerfunktion:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(1) &\approx 0.159\,, \;\; \mathrm{Q}(\sqrt{2}) \approx 0.079\,, \;\; \mathrm{Q}(\sqrt{3}) \approx 0.042\,, \\ \mathrm{Q}(2) &\approx 0.023\,, \;\; \mathrm{Q}(2.14) \approx 0.016\,, \; \mathrm{Q}(\sqrt{5}) \approx 0.013\,. \end{aligned}$$

Fragebogen zu "A4.10: Union Bound"

a) Welche der drei Konfigurationen führt zur kleinsten Fehlerwahrscheinlichkeit (zumindest nach der Union Bound–Näherung)?

- Konfiguration A,
- Konfiguration B,
- Konfiguration C.

b) Berechnen Sie die „gemittelte Union Bound" ($p_{\rm UB}$) für die Konfiguration A.

Konfiguration A: $p_{\rm UB}$ =

c) Berechnen Sie die „gemittelte Union Bound" ($p_{\rm UB}$) für die Konfiguration B.

Konfiguration B: $p_{\rm UB}$ =

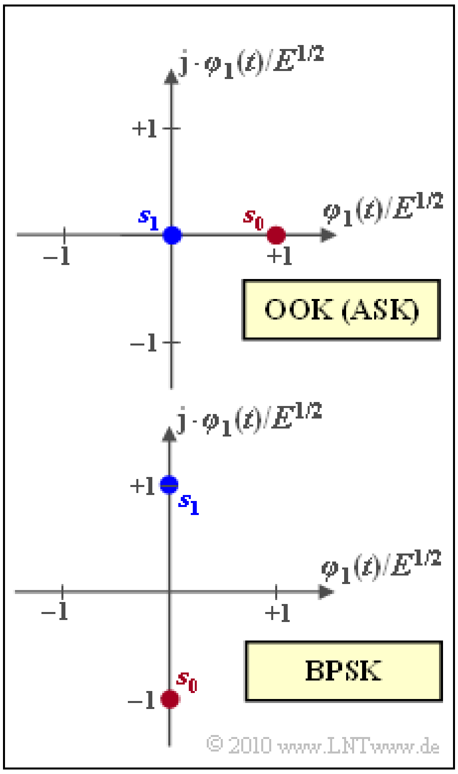
d) Berechnen Sie die „gemittelte Union Bound" ($p_{\rm UB}$) für die Konfiguration C.

Konfiguration C: $p_{\rm UB}$ =

e) Wie müsste der Rauscheffektivwert σ_n bei Konfiguration A verändert werden, damit sich die gleiche *Union Bound* wie in Teilaufgabe d) ergibt?

Konfiguration A: σ_n =

A4.11: OOK und BPSK



Die Grafik zeigt Signalraumkonstellationen für trägermodulierte Modulationsverfahren:

- **On–Off–Keying** (OOK), in anderen LNTwww–Büchern auch als *Amplitude Shift Keying* (ASK) bezeichnet, sowie
- **Binary Phase Shift Keying** (BPSK).

Für die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit gehen wir vom AWGN–Kanal aus. In diesem Fall ist die Fehlerwahrscheinlichkeit (bezogen auf Symbole oder auf Bit gleichermaßen):

$$p_\mathrm{S} = p_\mathrm{B} = \mathrm{Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right).$$

Hierbei bezeichnet

- d den Abstand der Signalraumpunkte, und
- $\sigma_n^2 = N_0/2$ die Varianz des AWGN–Rauschens.

In den Teilfragen ab c) wird zudem auf die mittlere Signalenergie E_S Bezug genommen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.4.** Weiter wird die hier behandelte Thematik auch im **Kapitel 1.5** dieses Buches sowie im **Kapitel 4.2** des Buches „Modulationsverfahren" ausführlich behandelt. Verwenden Sie für die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion die folgende Näherung:

$$\mathrm{Q}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Fragebogen zu "A4.11: OOK und BPSK"

a) Wieviele Bit (b) stellt jeweils ein Symbol dar? Wie groß ist die Stufenzahl M?

$\boldsymbol{b}$ =

$\boldsymbol{M}$ =

b) Welche Darstellung zeigen die Signalraumkonstellationen,

- die Darstellung im (tatsächlichen) Bandpassbereich,
- die Darstellung im (äquivalenten) Tiefpassbereich?

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für OOK abhängig von E_S/N_0?

$\boldsymbol{E_S/N_0 = 9}$: $\boldsymbol{p_S}$ =

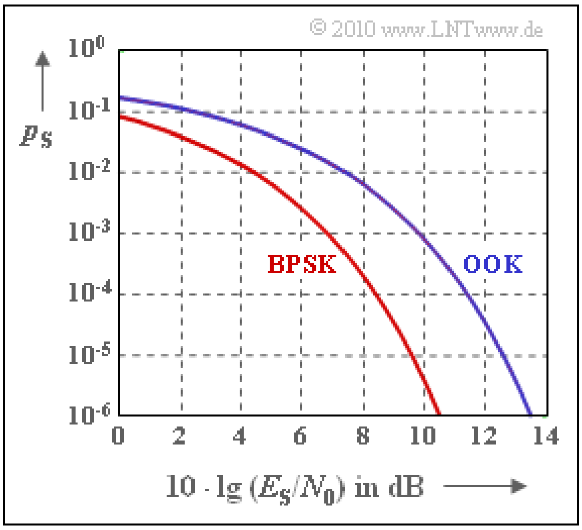
$\boldsymbol{10 \cdot \lg E_S/N_0 = 12}$ **dB**: $\boldsymbol{p_S}$ =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für BPSK abhängig von E_S/N_0?

$\boldsymbol{E_S/N_0 = 9}$: $\boldsymbol{p_S}$ =

$\boldsymbol{10 \cdot \lg E_S/N_0 = 12}$ **dB**: $\boldsymbol{p_S}$ =

Z4.11: Nochmals OOK und BPSK



Hier werden die Fehlerwahrscheinlichkeiten p_S von den digitalen Modulationsverfahren OOK und BPSK ohne Herleitung angegeben. Beispielsweise erhält man mit der sogenannten Q–Funktion

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

für den AWGN–Kanal – gekennzeichnet durch E_S/N_0 – und weiteren optimalen Voraussetzungen (zum Beispiel kohärente Demodulation)

- für *On–Off–Keying* (OOK), oft auch *Amplitude Shift Keying* (2-ASK) genannt:

$$p_S = Q\left(\sqrt{E_S/N_0}\right),$$

- und für *Binary Phase Shift Keying* (BPSK):

$$p_S = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_S/N_0}\right).$$

Diese Fehlerwahrscheinlichkeiten sind in der Grafik dargestellt. Für $10 \cdot \lg E_S/N_0$ = 10 dB erhält man beispielsweise entsprechend den exakten Funktionen:

$$p_S = 7.83 \cdot 10^{-4}\ (\text{OOK}), \quad p_S = 3.87 \cdot 10^{-6}\ (\text{BPSK}).$$

Um bei BPSK $p_S = 10^{-5}$ zu erreichen, muss $10 \cdot \lg E_S/N_0 \geq 9.6$ dB sein.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.4** des vorliegenden Buches. Die Herleitungen finden Sie auch im **Kapitel 1.5.** Für die numerischen Auswertungen können Sie die folgende obere Schranke verwenden:

$$Q(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Fragebogen zu "Z4.11: Nochmals OOK und BPSK"

a) Berechnen Sie die OOK–Bitfehlerwahrscheinlichkeit für $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 10$ dB unter Verwendung der oberen Schranke.

OOK, $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 10$ dB: p_S =

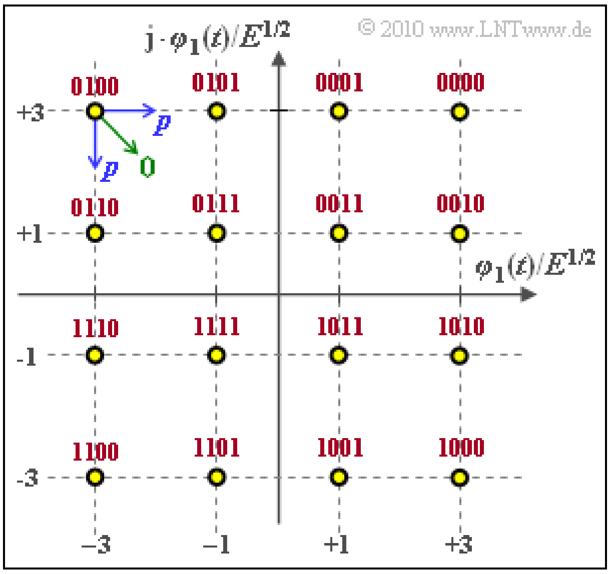
b) Wie groß ist die BPSK–Bitfehlerwahrscheinlichkeit für $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 10$ dB?

BPSK, $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 10$ dB: p_S =

c) Geben Sie für On–Off–Keying den minimalen Wert für E_S/N_0 (in dB) an, damit gerade noch die Fehlerwahrscheinlichkeit $p_S = 10^{-5}$ erreicht wird.

OOK: $10 \cdot \lg E_S/N_0$ = dB

A4.12: Berechnungen zur 16-QAM



Beigefügte Grafik zeigt die Signalraumkonstellation der **Quadraturamplitudenmodulation** mit M = 16 Signalraumpunkten. Für dieses Modulationsverfahren sollen berechnet werden:

- die mittlere Energie pro Symbol bzw. pro Bit,
- die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S sowie die **Union Bound** als obere Schranke,
- die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B bei Graycodierung. Die Gray–Zuordnung ist in der Grafik angegeben (rote Beschriftung).

Hinweis: Die Aufgabe behandelt einen Teilaspekt von **Kapitel 4.4.** Die Wahrscheinlichkeit, dass das linke obere Symbol in eines der benachbarten Symbole verfälscht wird, wird mit p abgekürzt (blaue Pfeile in der Grafik). Eine diagonale Verfälschung ⇒ zwei Bit verfälscht (grüner Pfeil) wird ausgeschlossen.

Für den AWGN–Kanal gilt mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral für diese Hilfsgröße:

$$p = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2E/N_0}\right).$$

Verwenden Sie für numerische Berechnungen E = 1 mWs und p = 0.004. Aus diesen Werten kann die AWGN–Rauschleistungsdichte N_0 näherungsweise berechnet werden:

$$p = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2E/N_0}\right) = 0.004 \;\Rightarrow\; \frac{2E}{N_0} \approx 2.65^2 \approx 7 \;\Rightarrow\; N_0 = \frac{E}{3.5} \approx 1.4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/Hz}.$$

Fragebogen zu "A4.12: Berechnungen zur 16-QAM"

a) Es sei E = 0.001 Ws. Wie groß ist die mittlere Energie pro Symbol?

E_S = Ws

b) Wie groß ist die mittlere Energie pro Bit?

E_B = mW

c) Geben Sie die (verbesserte) „Union Bound" (p_{UB}) mit p = 0.4% an.

p_{UB} =

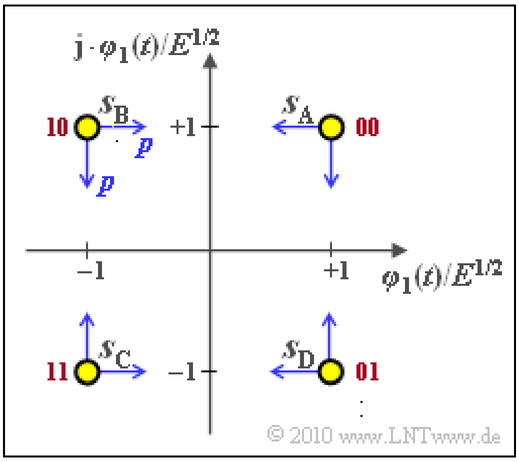
d) Berechnen Sie die tatsächliche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $p_S < p_{UB}$.

p_S =

e) Berechnen Sie die tatsächliche Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Graycodierung.

p_B =

A4.13: Vierstufige QAM



Wir betrachten nun eine Quadraturamplitudenmodulation mit $M = 4$ Symbolen und den (normierten) Signalraumpunkten

$$\boldsymbol{s}_{\rm A} = (+1, +1)\,, \quad \boldsymbol{s}_{\rm B} = (-1, +1)\,,$$
$$\boldsymbol{s}_{\rm C} = (-1, -1)\,, \quad \boldsymbol{s}_{\rm D} = (+1, -1)\,.$$

Die Symbole sind gleichwahrscheinlich. Damit kann man zur Berechnung der mittleren Symbolfehlerwahrscheinlichkeit auf die Mittelung verzichten.

Beispielsweise gilt:

$$p_{\rm S} = {\rm Pr}(\mathcal{E}) = {\rm Pr}(\boldsymbol{s}_{\rm B} \cup \boldsymbol{s}_{\rm C} \cup \boldsymbol{s}_{\rm D} \text{ entschieden} \,|\, \boldsymbol{s}_{\rm A} \text{ gesendet})\,.$$

Die Zuordnung der Symbole zu *Bitdupeln* kann ebenfalls der Grafik (rote Beschriftungen) entnommen werden. Hierbei ist die Graycodierung vorausgesetzt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **Theorieseite 6** von Kapitel 4.4. Für die Teilaufgabe d) ist der (zeitdiskrete) AWGN–Kanal mit der Varianz $\sigma_n^2 = N_0/2$ vorausgesetzt. Für die Wahrscheinlichkeit, dass durch dessen Rauschsignal n ein Symbol horizontal oder vertikal verfälscht wird, gilt mit der komplementären Gaußschen Fehlerfunktion:

$$p = {\rm Pr}(n < -x_0) = {\rm Pr}(n > +x_0) = {\rm Q}(x_0/\sigma_n)\,.$$

Fragebogen zu "A4.13: Vierstufige QAM"

a) Geben Sie als obere Schranke für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S die „Union Bound" an ($p_{UB} \ge p_S$). Es gelte $p = 0.1$.

p_{UB} =

b) Wie groß ist die tatsächliche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit?

p_S =

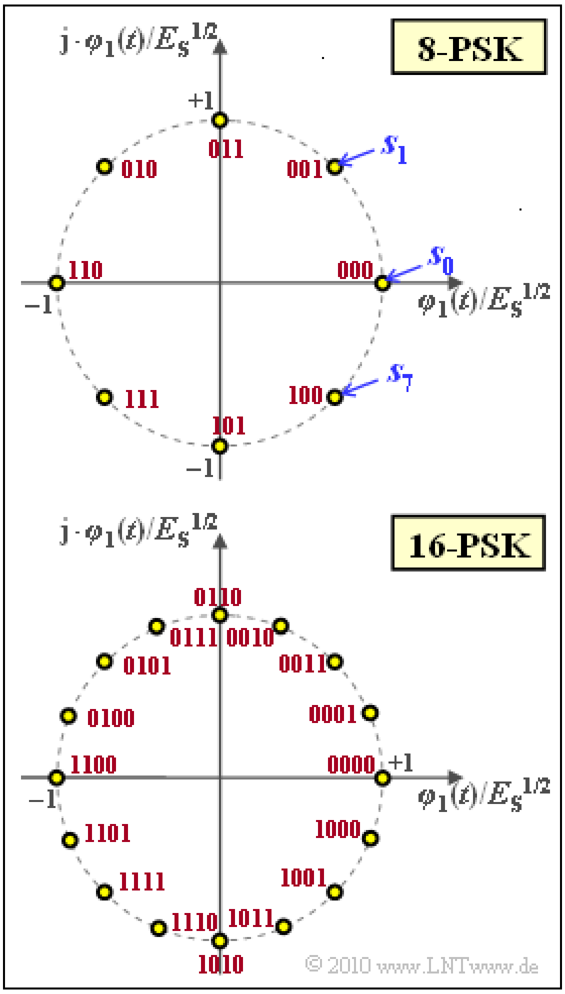
c) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Graycodierung?

p_B =

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen p_B und E_B/N_0?

- ☐ $p_B = Q[(E_B/N_0)^{1/2}]$,
- ☐ $p_B = Q[(2E_B/N_0)^{1/2}]$,
- ☐ $p_B = Q[(E_B/(2N_0))^{1/2}]$.

A4.14: 8-PSK und 16-PSK



Betrachtet wird nun eine Signalmenge $s_i(t)$, die auf den Zeitbereich $0 \le t \le T$ begrenzt ist. Der Index i durchläuft die Werte 0, ... , $M - 1$:

$$s_i(t) = A \cdot \cos\left(2\pi f_{\rm T} t + 2\pi/M \cdot i\right) .$$

Es handelt sich hierbei um eine *Phasenmodulation* mit M Signalformen. Man nennt dieses Modulationsverfahren auch ***M*–PSK**. M ist meist eine Zweierpotenz.

Die Grafik zeigt die Signalraumkonstellation für M = 8 (oben) und M = 16 (unten). Alle Signalraumpunkte haben gleiche Energie $||\boldsymbol{s}_i||^2 = E_{\rm S}$ („mittlere Symbolenergie").

Die exakte Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit ist für $M \ne 2$ schwierig. Angegeben werden kann dagegen stets die sogenannte *Union Bound* als obere Schranke für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ($p_{\rm UB} \ge p_{\rm S}$):

$$p_{\rm UB} = 2 \cdot {\rm Q}\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) = 2 \cdot {\rm Q}\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) .$$

Hierbei bezeichnen:

- d ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten, zum Beispiel zwischen $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$. Verläuft die Entscheidungsgrenze senkrecht zur Verbindungslinie von $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{s}_1$ genau mittig, so ist $d/2$ der Abstand von $\boldsymbol{s}_0$ bzw. $\boldsymbol{s}_1$ von dieser Entscheidungsgrenze.
- Die Varianz des AWGN–Rauschens ist $\sigma_n^2 = N_0/2$.
- Der Faktor 2 in obiger Grenze berücksichtigt, dass für $M > 2$ jeder Signalraumpunkt in zwei Richtungen verfälscht werden kann, zum Beispiel bei der 8–PSK das Symbol $\boldsymbol{s}_0$ in das Symbol $\boldsymbol{s}_1$ oder in das Symbol $\boldsymbol{s}_7$.
- ${\rm Q}(x)$ ist die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion, für die folgende Näherung gilt:

$${\rm Q}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x} \cdot {\rm e}^{-x^2/2} .$$

In der letzten Teilaufgabe geht es um die Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Für diese wurde im **Theorieteil** unter der Voraussetzung eines *Graycodes* folgende Schranke angegeben:

$$p_{\rm B} \le \frac{2}{\log_2(M)} \cdot {\rm Q}\left(\sqrt{\log_2(M)} \cdot \sin(\pi/M) \cdot \sqrt{2E_{\rm B}/N_0}\right) .$$

Diese Gleichung ist allerdings nur für $M > 4$ anzuwenden. Dagegen ergibt sich

- für $M = 2$ aus der Identität mit der **BPSK,** und
- für $M = 4$ aus der Tatsache, dass die 4–PSK mit der 4–QAM identisch ist,

die exakte Lösung

$$p_\mathrm{B} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2E_\mathrm{B}/N_0}\right) .$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4** und bezieht sich insbesondere auf die **Seite 7.** Bei der Lösung der Aufgabe können Sie folgende Gleichungen verwenden:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\,, \quad 1-\cos(2\alpha) = \sin^2(\alpha)\,,\\ \int_0^T \cos^2(2\pi f_\mathrm{T} t)\,\mathrm{d}t &= 0.5\,, \ \text{falls } f_\mathrm{T} >> 1/T\,.\end{aligned}$$

Die Zuordnung der 8 bzw. 16 Symbole zu Binärfolgen der Länge 3 bzw. 4 nach der Graycodierung kann der Grafik entnommen werden (rote Beschriftung).

Fragebogen zu "A4.14: 8-PSK und 16-PSK"

a) Wie lauten die Basisfunktionen bei der Bandpassdarstellung? $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ seien jeweils auf den Bereich $0 \le t \le T$ begrenzt.

- ☐ $\varphi_1(t) = \cos(2\pi f_T t)$,
- ☐ $\varphi_1(t) = (2/T)^{1/2} \cdot \cos(2\pi f_T t)$,
- ☐ $\varphi_2(t) = E_S \cdot \sin(2\pi f_T t)$,
- ☐ $\varphi_2(t) = -(2/T)^{1/2} \cdot \sin(2\pi f_T t)$.

b) Wie lauten der Inphase– und der Quadraturanteil des Signalraumpunktes $\boldsymbol{s}_i$? Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ $s_{\text{I}i} = E_S^{0.5} \cdot \cos(2\pi \cdot i/M)$,
- ☐ $s_{\text{I}i} = E_S^{0.5} \cdot \sin(2\pi \cdot i/M)$,
- ☐ $s_{\text{Q}i} = E_S^{0.5} \cdot \cos(2\pi \cdot i/M)$,
- ☐ $s_{\text{Q}i} = E_S^{0.5} \cdot \sin(2\pi \cdot i/M)$.

c) Wie groß ist der Abstand d zwischen zwei benachbarten Signalraumpunkten? Welche Werte ergeben sich für $M = 8$ bzw. $M = 16$?

$\boldsymbol{M = 8}$: $\boldsymbol{d}$ = $\cdot E_S^{0.5}$

$\boldsymbol{M = 16}$: $\boldsymbol{d =}$ = $\cdot E_S^{0.5}$

d) Welcher Wert ergibt sich für die Union Bound (p_{UB}) mit $E_S/N_0 = 50$.

$\boldsymbol{M = 8}$: $\boldsymbol{p_{\text{UB}}}$ =

$\boldsymbol{M = 16}$: $\boldsymbol{p_{\text{UB}}}$ =

e) Gilt die Aussage: „p_{UB} nähert p_S um so genauer an, je größer M ist”?

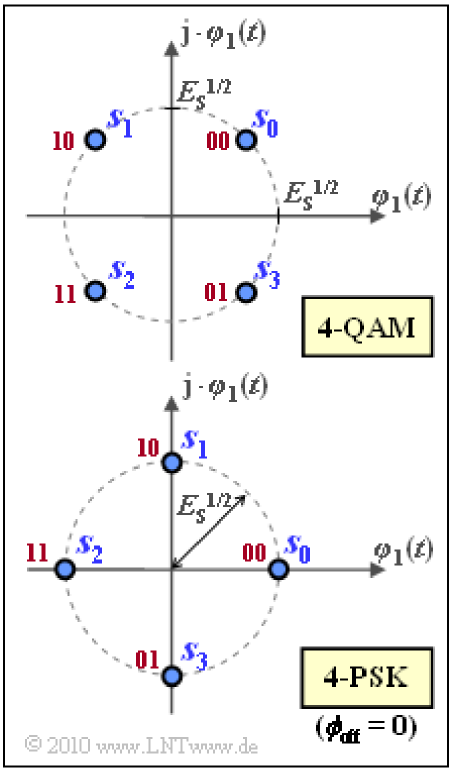
- ○ JA.
- ○ NEIN.

f) Welche Aussagen gelten hinsichtlich der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B?

- ☐ p_B ist für $M = 2$ und $M = 4$ am kleinsten.
- ☐ p_B ist für $M = 8$ am kleinsten.

- [ ] p_B ist für $M = 16$ am kleinsten.
- [ ] p_B ist nicht der Hauptgrund, dass man höherstufige PSK einsetzt.

Z4.14: 4-QAM und 4-PSK



Für die **Quadraturamplitudenmodulation** (M–QAM) wurde im Theorieteil für $M \geq 16$ eine obere Schranke („Union–Bound") der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit angegeben:

$$p_{\rm UB} = 4 \cdot {\rm Q}\left[\sqrt{E_{\rm S}/N_0}\right] \geq p_{\rm S}\,.$$

Im Theorieteil findet man ebenfalls die „Union–Bound" für die ***M*–stufige Phasenmodulation** (M–PSK)

$$p_{\rm UB} = 2 \cdot {\rm Q}\left[\sin(\pi/M) \cdot \sqrt{2E_{\rm S}/N_0}\right] \geq p_{\rm S}\,.$$

Bei beiden Verfahren hat jeder Signalraumpunkt die genau gleiche Energie, nämlich $E_{\rm S}$.

Aus der Grafik erkennt man, dass für den Sonderfall M = 4 die beiden Modulationsverfahren eigentlich identisch sein müssten, was aus den obigen Gleichungen nicht direkt hervorgeht.

Die 4–PSK ist hier mit dem Phasenoffset $\phi_{\rm off} = 0$ dargestellt. Mit einem allgemeinen Phasenoffset lauten dagegen die Inphase– und Quadraturanteile der Signalraumpunkte allgemein (i = 0, ... , M = 1):

$$\begin{aligned} s_{{\rm I}i} &= \cos\left(2\pi i/M + \phi_{\rm off}\right)\,, \\ s_{{\rm Q}i} &= \sin\left(2\pi i/M + \phi_{\rm off}\right)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **Theorieseite 6** und die **Theorieseite 7** von Kapitel 4.4. In der obigen Grafik rot eingezeichnet ist die Gray–Zuordnung der Symbole zu Bitdupeln.

Fragebogen zu "Z4.14: 4-QAM und 4-PSK"

a) Für welchen Phasenoffset stimmen die 4–QAM und die 4–PSK exakt überein?

$\boldsymbol{\phi}_{\text{off}}$ = Grad

b) Wie lautet die obere Schranke (Union–Bound, $p_{\rm UB} \ge p_{\rm S}$) für die 4–PSK?

- [ ] $p_{\rm UB} = 4 \cdot {\rm Q}[(E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm UB} = 2 \cdot {\rm Q}[(E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm UB} = 2 \cdot {\rm Q}[(2E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$.

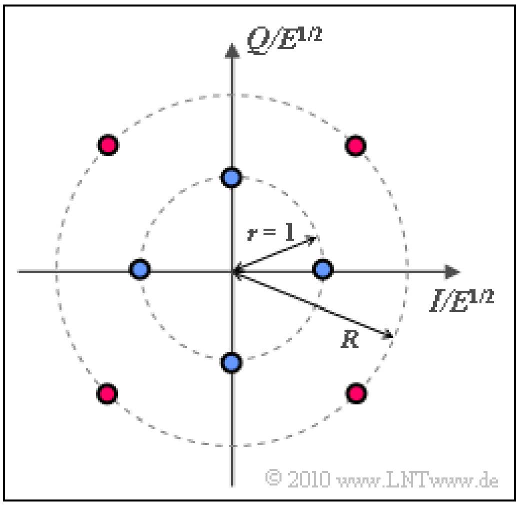
c) Geben Sie eine nähere obere Schranke für die 4–QAM an.

- [ ] $p_{\rm S} \le 4 \cdot {\rm Q}[(E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm S} \le 2 \cdot {\rm Q}[(E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm S} \le 2 \cdot {\rm Q}[(2E_{\rm S}/N_0)^{1/2}]$.

d) Wie lauten die Bitfehlerwahrscheinlichkeitsschranken für 4–QAM und 4–PSK, Graycodierung vorausgesetzt?

- [ ] $p_{\rm B} \le 2\ {\rm Q}[(2E_{\rm B}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm B} \le {\rm Q}[(2E_{\rm B}/N_0)^{1/2}]$,
- [ ] $p_{\rm B} \le {\rm Q}[(E_{\rm B}/N_0)^{1/2}]$.

A4.15: Optimale Signalraumbelegung



Betrachtet wird hier eine Signalraumkonstellation mit M = 8 Signalraumpunkten:

- Vier Punkte liegen auf einem Kreis mit Radius r = 1.
- Vier weitere Punkte liegen um 45 ° versetzt auf einem zweiten Kreis mit Radius R, wobei gelten soll:

$$R_{\rm min} \le R \le R_{\rm max}\,, \quad R_{\rm min} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \approx 0.518\,,$$

$$R_{\rm max} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \approx 1.932\,.$$

Die beiden Achsen (Basisfunktionen) seien jeweils normiert und werden vereinfachend mit I und Q bezeichnet. Zur weiteren Vereinfachung kann E = 1 gesetzt werden.

Im Fragebogen wird von blauen und roten Punkten gesprochen. Entsprechend der Grafik liegen die blauen Punkte auf dem Kreis mit Radius r = 1, die roten auf dem Kreis mit Radius R. Gezeichnet ist der Fall $R = R_{\rm max}$.

Der Systemparameter R soll in dieser Aufgabe so bestimmt werden, dass der Quotient

$$\eta = \frac{(d_{\rm min}/2)^2}{E_{\rm B}}$$

maximal wird. η ist ein Maß für die Güte eines Modulationsalphabets bei gegebener Sendeenergie pro Bit (*Power Efficiency*). Es berechnet sich aus

- der minimalen Distanz $d_{\rm min}$, und
- der Bitenergie $E_{\rm B}$.

Es ist darauf zu achten, dass $d_{\rm min}{}^2$ und $E_{\rm B}$ in gleicher Weise normiert sind, was aber bereits durch die Aufgabenstellung implizit gegeben ist.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Seite 6** und **Seite 7** von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.15: Optimale Signalraumbelegung"

a) Berechnen Sie die mittlere Energie $E_{\rm B}$ pro Bit abhängig von R, insbesondere für $R = 1$ und $R = 2^{0.5}$.

$R = 1$: $E_{\rm B}$ =

$R = 2^{0.5}$: $E_{\rm B}$ =

b) Welche Aussagen gelten für den minimalen Abstand zweier Signalraumpunkte?

- [ ] Für $R < R_{\rm min}$: Minimale Distanz zwischen zwei roten Punkten.
- [ ] Für $R > R_{\rm max}$: Minimale Distanz zwischen zwei blauen Punkten.
- [ ] $R_{\rm min} \le R \le R_{\rm max}$: Minimale Distanz zwischen „Rot” und „Blau”.

c) Berechnen Sie die minimale Distanz abhängig von R, insbesondere für

$R = 1$: $d_{\rm min}$ =

$R = 2^{0.5}$: $d_{\rm min}$ =

d) Geben Sie die Leistungseffizienz η allgemein an. Welches η ergibt sich für $R = 1$?

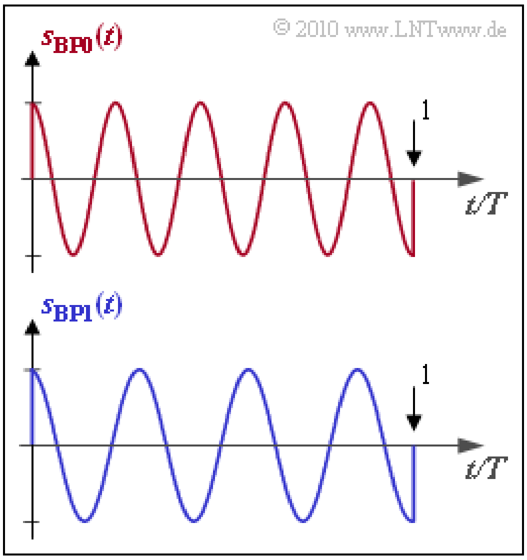
$R = 1$: η =

e) Welche Werte ergeben sich für $R = R_{\rm min}$ und $R = R_{\rm max}$? Interpretation.

$R = R_{\rm min}$: η =

$R = R_{\rm max}$: η =

A4.16: Binary Frequency Shift Keying



Bei der binären FSK werden die beiden Nachrichten m_0 und m_1 durch zwei unterschiedliche Frequenzen dargestellt. Für die beiden möglichen Bandpass–Signale gilt dann jeweils im Bereich $0 \le t \le T$ mit $f_0 = f_T + \Delta f_A$ sowie $f_1 = f_T - \Delta f_A$:

$$\begin{aligned} s_{\rm BP0}(t) &= \sqrt{2E/T} \cdot \cos(2\pi f_0 t)\,, \\ s_{\rm BP1}(t) &= \sqrt{2E/T} \cdot \cos(2\pi f_1 t)\,. \end{aligned}$$

Die Grafik zeigt beispielhafte Signale. In obiger Gleichung gibt f_T die *Trägerfrequenz* an und Δf_A den *Frequenzhub* als die maximale Abweichung der **Augenblicksfrequenz** von der Trägerfrequenz an. T ist die Symboldauer und E die Signalenergie. Dabei gilt gleichermaßen für die mittlere Symbolenergie und die mittlere Bitenergie:

$$E_{\rm S} = E_{\rm B} = E\,.$$

Meist arbeitet man mit dem *Modulationsindex*, der als das Verhältnis von Gesamtfrequenzhub und Symbolrate definiert ist:

$$h = \frac{2 \cdot \Delta f_{\rm A}}{1/T} = 2 \cdot \Delta f_{\rm A} \cdot T\,.$$

Die äquivalente Tiefpassdarstellung führt unter Verwendung von h zu den beiden komplexen Signalen

$$\begin{aligned} s_{\rm TP0}(t) &= \sqrt{E/T} \cdot {\rm e}^{+{\rm j}\cdot \pi \cdot h \cdot t/T}\,, \quad 0 \le t \le T\,, \\ s_{\rm TP1}(t) &= \sqrt{E/T} \cdot {\rm e}^{-{\rm j}\cdot \pi \cdot h \cdot t/T}\,, \quad 0 \le t \le T\,. \end{aligned}$$

Eine orthogonale FSK liegt vor, wenn das innere Produkt den Wert 0 ergibt:

$$< s_{\rm TP0}(t) \cdot s_{\rm TP1}(t) > \; = \int_0^T s_{\rm TP0}(t) \cdot s_{\rm TP1}^{\star}(t)\,{\rm d}t = 0\,.$$

In diesem Fall ist auch eine nichtkohärente Demodulation wie im **Kapitel 4.5** beschrieben möglich.

Das innere Produkt der BP–Signale kann aus dem inneren Produkt der TP–Signale ermittelt werden:

$$< s_{\rm BP0}(t) \cdot s_{\rm BP1}(t) > \; = {\rm Re}\left[< s_{\rm TP0}(t) \cdot s_{\rm TP1}(t) > \right]\,.$$

Gilt $\langle s_{BP0}(t) \cdot s_{BP1}(t)\rangle = 0$, aber gleichzeitig auch $\langle s_{TP0}(t) \cdot s_{TP1}(t)\rangle \ne 0$, so ist zwar eine kohärente Demodulation möglich, aber keine nichtkohärente.

Hinweis: Die Aufgabe bescheibt die im Kapitel 4.4 auf **Seite 8** und **Seite 9** behandelte Thematik.

Fragebogen zu "A4.16: Binary Frequency Shift Keying"

a) Welche Trägerfrequenz f_T und welcher Frequenzhub liegen der Grafik auf der Angabenseite zugrunde?

f_T = $\cdot 1/T$

Δf_A = $\cdot 1/T$

b) Welchem Modulationsindex h entspricht dieser Frequenzhub?

h =

c) Für welche Werte von h ist die Orthogonalität der TP–Signale gegeben?

- ☐ $h = 0.5$,
- ☐ $h = \pi/4$,
- ☐ $h = 1$,
- ☐ $h = 2$.

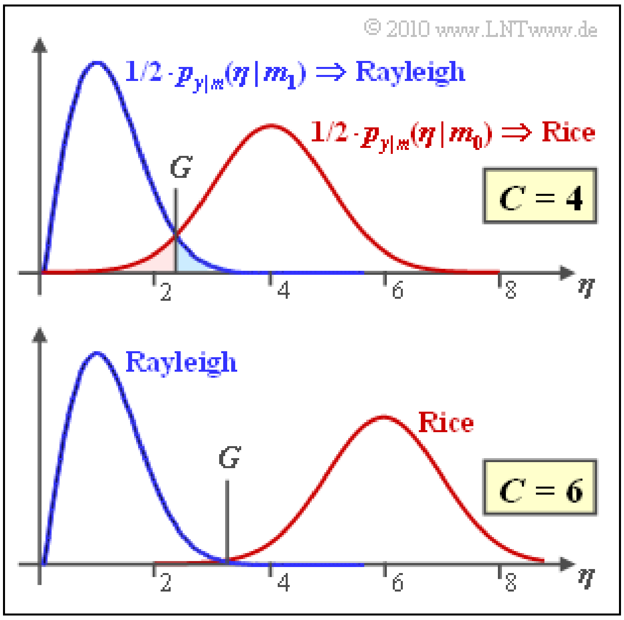
d) Für welche Werte von h ist die Orthogonalität der BP–Signale gegeben?

- ☐ $h = 0.5$,
- ☐ $h = \pi/4$,
- ☐ $h = 1$,
- ☐ $h = 2$.

e) Welche Aussagen gelten hinsichtlich kohärenter/nichtkohärenter Demodulation?

- ☐ Kohärente Demodulation ist immer möglich.
- ☐ Ist nichtkohärente Demodulation möglich, so geht auch kohärente.
- ☐ Ist kohärente Demodulation möglich, so geht auch nichtkohärente.

A4.17: Nichtkohärente OOK



Die Abbildung zeigt die beiden Dichtefunktionen, die sich bei einer nichtkohärenten Demodulation von *On–Off–Keying* ergeben. Dabei wird vorausgesetzt, dass die zwei OOK–Signalraumpunkte bei $\boldsymbol{s}_0 = C$ (Nachricht m_0) und bei $\boldsymbol{s}_1 = 0$ (Nachricht m_1) liegen.

Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit dieses Systems wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} p_S &= \Pr(\mathcal{E}) = \\ &= 1/2 \cdot \int_0^G p_{y|m}(\eta|m_0)\,\mathrm{d}\eta + \\ &+ 1/2 \cdot \int_G^\infty p_{y|m}(\eta|m_1)\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned}$$

Mit der Streuung $\sigma_n = 1$, die im Folgenden vorausgesetzt wird, lautet die sich für $m = m_1$ ergebende Rayleighverteilung (blaue Kurve):

$$p_{y|m}(\eta|m_1) = \eta \cdot \mathrm{e}^{-\eta^2/2}\,.$$

Die Riceverteilung (rote Kurve) kann im vorliegenden Fall (wegen $C >> \sigma_n$) durch eine Gaußverteilung angenähert werden:

$$p_{y|m}(\eta|m_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-(\eta - C)^2/2}\,.$$

Die optimale Entscheidergrenze $G_{\rm opt}$ ergibt sich aus dem Schnittpunkt von roter und blauer Kurve. Aus den beiden Skizzen erkennt man, dass $G_{\rm opt}$ von C abhängt. Für die obere Grafik gilt $C = 4$, für die untere $C = 6$. Alle Größen sind normiert und es wird stets $\sigma_n = 1$ vorausgesetzt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.5.** Für das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral können Sie folgende Näherungen verwenden:

$$\mathrm{Q}(1.5) \approx 0.0668\,,\ \ \mathrm{Q}(2.5) \approx 0.0062\,,\ \ \mathrm{Q}(2.65) \approx 0.0040\,.$$

Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Berechnungstool kontrollieren:

Nichtkohärentes On–Off–Keying

Fragebogen zu "A4.17: Nichtkohärente OOK"

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der mittleren Symbolenergie E_S und der Konstanten C der Riceverteilung? Es gilt:

- ☐ $E_S = C$,
- ☐ $E_S = C^2$,
- ☐ $E_S = C^2/2$.

b) Geben Sie eine Bestimmungsgleichung für die optimale Entscheidergrenze G an. Es gilt:

- ☐ $G = C/2$,
- ☐ $G - 1/C \cdot \ln(G) = C/2 + 1/(2C) \cdot \ln(2\pi)$,
- ☐ $G = 1/C \cdot \ln(G)$.

c) Bestimmen Sie die optimale Entscheidergrenze für $C = 4$.

$C = 4$: G_{opt} =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für $C = 4$ und $G = 2.5$?

$C = 4$: p_S = %

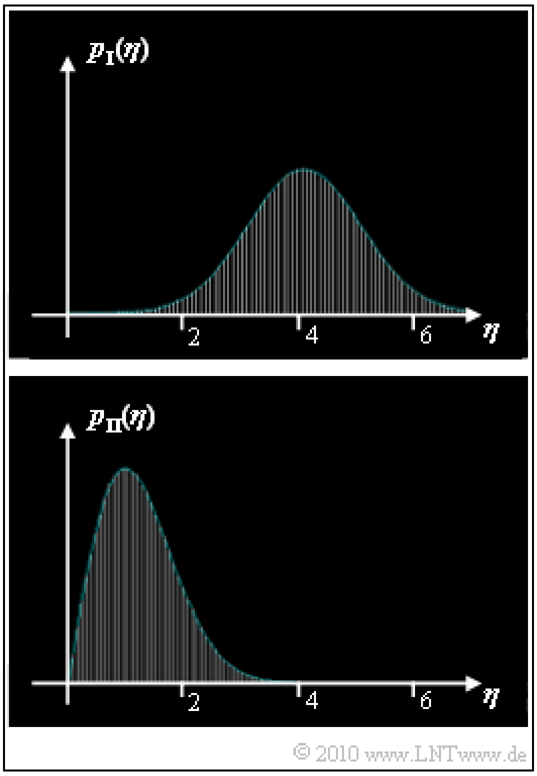
e) Bestimmen Sie die optimale Entscheiderschwelle für $C = 6$.

$C = 6$: G_{opt} =

f) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $C = 6$ und $G = 3.5$?

$C = 6$: p_S = %

Z4.17: Rayleigh- und Riceverteilung



Für die Untersuchung von Nachrichtensystemen haben die Rayleigh– und die Rice–Verteilung eine große Bedeutung. Im Folgenden sei y eine rayleigh– oder eine riceverteilte Zufallsgröße und η jeweils eine Realisierung hiervon.

- Die *Rayleighverteilung* ergibt sich dabei für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kurz: WDF) einer Zufallsgröße y, die sich aus den beiden gaußverteilten und statistisch unabhängigen Komponenten u und v (beide mit der Streuung σ_n) wie folgt ergibt:

$$y = \sqrt{u^2 + v^2} \;\Rightarrow\; p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

- Die *Riceverteilung* erhält man unter sonst gleichen Randbedingungen für den Anwendungsfall, dass bei einer der beiden Komponenten noch eine Konstante C addiert wird:

$$y = \sqrt{(u+C)^2 + v^2} \quad\Rightarrow\quad p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2 + C^2}{2\sigma_n^2}\right] \cdot {\rm I}_0\left[\frac{\eta \cdot C}{\sigma_n^2}\right].$$

In dieser Gleichung bezeichnet ${\rm I}_0(x)$ die **modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung.**

In der Grafik sind die beiden Dichtefunktionen dargestellt, wobei allerdings nicht angegeben wird, ob $p_{\rm I}(\eta)$ bzw. $p_{\rm II}(\eta)$ zu einer Rayleigh– oder zu einer Riceverteilung gehören. Bekannt ist nur, dass je eine Rayleigh– und eine Riceverteilung dargestellt ist. Der Parameter σ_n ist bei beiden gleich ist.

Für Ihre Entscheidung, ob Sie $p_{\rm I}(\eta)$ oder $p_{\rm II}(\eta)$ der Riceverteilung zuordnen, und für die Ermittlung der WDF–Parameter können Sie folgende Aussagen berücksichtigen:

- Für große Werte des Quotienten C/σ_n lässt sich die Riceverteilung durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert C und Streuung σ_n annähern.
- Die der Grafik zugrunde liegenden Werte von C und σ_n sind ganzzahlig.

Hinsichtlich der Rayleighverteilung ist zu beachten:

- Für beide Verteilungen ist das gleiche σ_n zugrunde gelegt.
- Für die Streuung (Wurzel aus der Varianz) der Rayleighverteilung gilt:

$$\sigma_y = \sigma_n \cdot \sqrt{2 - \pi/2} \;\approx\; 0.655 \cdot \sigma_n\,.$$

- Für die Streuung/Varianz der Riceverteilung kann allgemein nur ein komplizierter Ausdruck mit hypergeometrischen Funktionen angegeben werden, ansonsten nur eine Näherung für $C >> \sigma_n$ entsprechend der Gaußverteilung.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.5.** Gegeben ist zudem das folgende Integral:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -1/2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + \text{const.}$$

Fragebogen zu "Z4.17: Rayleigh- und Riceverteilung"

a) Ordnen Sie die Grafiken der Rayleigh– bzw. Riceverteilung zu.

- $p_{\rm I}(\eta)$ entspricht der Rayleighverteilung, $p_{\rm II}(\eta)$ der Riceverteilung.
- $p_{\rm I}(\eta)$ entspricht der Riceverteilung, $p_{\rm II}(\eta)$ der Rayleighverteilung.

b) Geben Sie die Parameter der hier dargestellten Riceverteilung an.

C =

σ_n =

c) Welche Verteilung besitzt eine größere Varianz,

- die Rayleighverteilung,
- die Riceverteilung?

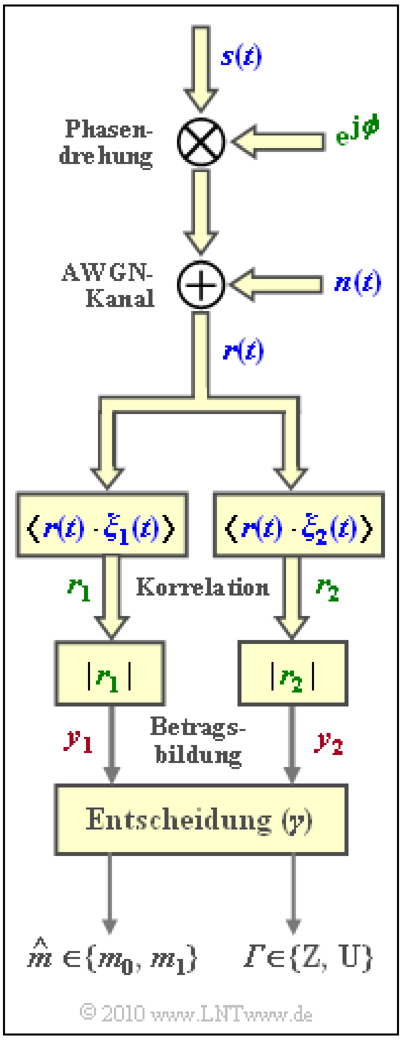
d) Berechnen Sie die Überschreitungswahrscheinlichkeiten der Rayleighverteilung:

$\Pr(y > \sigma_n)$ =

$\Pr(y > 2\sigma_n)$ =

$\Pr(y > 3\sigma_n)$ =

A4.18: Nichtkohärente BPSK–Demodulation



Wir betrachten *Frequency Shift Keying* (FSK) mit M = 2 ⇒ binäre Signalisierung. Die beiden Basisfunktionen im Tiefpassbereich sind in diesem Fall komplex und lauten

$$\xi_1(t) \;=\; \sqrt{1/T}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\cdot\pi\cdot h\cdot t/T}\,,\quad 0 \le t \le T\,,$$
$$\xi_2(t) \;=\; \sqrt{1/T}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\pi\cdot h\cdot t/T}\,,\quad 0 \le t \le T\,.$$

Für die zwei möglichen Signalformen im Tiefpassbereich gilt dann mit der mittleren Symbolenergie E_S:

$$m_0 : s_{\mathrm{TP},0} = \sqrt{E_\mathrm{S}}\cdot \xi_1(t) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{s}_0 = (\sqrt{E_\mathrm{S}}, 0)\,,$$
$$m_1 : s_{\mathrm{TP},1} = \sqrt{E_\mathrm{S}}\cdot \xi_2(t) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{s}_1 = (0, \sqrt{E_\mathrm{S}})\,.$$

Hierbei gibt h den sog. *Modulationsindex* an. Dieser muss gewisse Kriterien erfüllen, damit sich auch nach der Demodulation orthogonale Signalformen ergeben. Diese Kriterien hängen allerdings davon ab, ob beim Empfänger ein kohärenter oder ein nichtkohärenter Demodulator verwendet wird.

Die Grafik zeigt im unteren Bereich den nichtkohärenten Demodulator für binäres *Frequency Shift Keying* (FSK). Alle komplexen Signale sind blau beschriftet, komplexe Werte grün und reelle Werte rot.

Gegenüber dem im **Theorieteil** angegebenen Entscheidungsprozess wird nun ein komplizierterer Entscheider betrachtet, der außer dem Schätzwert noch ein *Sicherheitsflag* $\mathit{\Gamma}$ = {„Z”, „U”} ausgibt. „Z” und „U” stehen hierbei für eine zuverlässige bzw. eine unzuverlässige Entscheidung. Es gibt also vier Möglichkeiten der Entscheidung, gesteuert durch den Parameter γ:

$$\hat{m} \;=\; m_0,\; \mathit{\Gamma} = \text{"Z"},\;\; \text{falls } y_1 > \gamma\cdot y_2\,,$$
$$\hat{m} \;=\; m_0,\; \mathit{\Gamma} = \text{"U"},\;\; \text{falls } y_2 < y_1 < \gamma\cdot y_2\,,$$
$$\hat{m} \;=\; m_1,\; \mathit{\Gamma} = \text{"Z"},\;\; \text{falls } y_2 > \gamma\cdot y_1\,,$$
$$\hat{m} \;=\; m_1,\; \mathit{\Gamma} = \text{"U"},\;\; \text{falls } y_1 < y_2 < \gamma\cdot y_1\,.$$

In den Fragen zur Aufgabe werden die beiden Werte γ = 1 und γ = 2 betrachtet.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Entscheider fälschlicherweise für das Symbol m_1 entscheidet und zudem anzeigt, dass diese Entscheidung als zuverlässig zu betrachten ist (besonders verwerflich), gilt

$$\mathrm{Pr}\{\hat{m} = m_1,\, \mathit{\Gamma} = \text{"Z"}\,|\, m_0\} = \frac{1}{1+\gamma^2}\cdot \exp\left[-\frac{\gamma^2\cdot E_\mathrm{S}}{(1+\gamma^2)\cdot N_0}\right].$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.5.**

Fragebogen zu "A4.18: Nichtkohärente BPSK–Demodulation"

a) Welche Aussagen sind bei kohärenter Demodulation der FSK zutreffend?

- ☐ Orthogonalität ergibt sich, wenn h ganzzahlig ist.
- ☐ Auch für $h = 0.5$ ergeben sich orthogonale Signalformen.
- ☐ Orthogonalität ist grundsätzlich nicht zu erreichen.
- ☐ Beim AWGN–Kanal gilt $r(t) = s(t) + n(t)$.

b) Welche Aussagen sind bei nichtkohärenter Demodulation der FSK zutreffend?

- ☐ Orthogonalität ergibt sich, wenn h ganzzahlig ist.
- ☐ Auch für $h = 0.5$ ergeben sich orthogonale Signalformen.
- ☐ Orthogonalität ist grundsätzlich nicht zu erreichen.
- ☐ Beim AWGN–Kanal gilt $r(t) = s(t) + n(t)$.

c) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Schätzwert nicht mit der gesendeten Nachricht übereinstimmt? ($E_S/N_0 = 10$).

p_S =

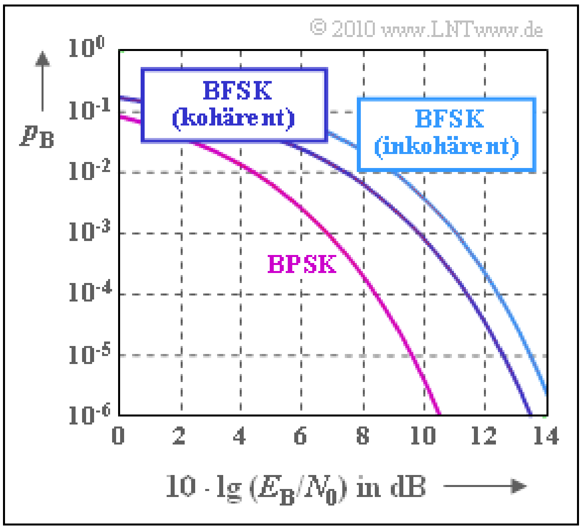
d) Es sei $\gamma = 2$ und $E_S/N_0 = 10$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotz Fehler das Sicherheitsflag eine zuverlässige Entscheidung signalisiert?

$\gamma = 2$: Pr(Γ = „Z”, Fehler) =

e) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Fehler die Zusatzinformation „unzuverlässig” angezeigt wird? Es sei weiterhin $E_S/N_0 = 10$.

$\gamma = 2$: Pr(Γ = „U” | Fehler) =

Z4.18: FSK kohärent/nichtkohärent



Die Grafik zeigt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für eine binäre **FSK–Modulation** (BFSK) bei

- kohärenter Demodulation bzw.
- inkohärenter Demodulation

im Vergleich zur binären Phasenmodulation (BPSK). Es wird stets Orthogonalität vorausgesetzt. Bei kohärenter Demodulation kann hierbei der Modulationsindex h ein Vielfaches von 0.5 sein, so dass die mittlere Kurve auch für *Minimum Shift Keying* (MSK) gültig ist. Dagegen muss bei nichtkohärenter Demodulation einer FSK der Modulationsindex h ein Vielfaches von 1 sein.

Diesem Systemvergleich liegt wieder der AWGN–Kanal zugrunde, gekennzeichnet durch das Verhältnis E_B/N_0. Die Gleichungen für die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten lauten bei

- **Binary Frequency Shift Keying** (BFSK) mit *kohärenter* Demodulation:
$$p_B = \mathrm{Q}\left(\sqrt{E_B/N_0}\right).$$
- **Binary Frequency Shift Keying** (BFSK) mit *inkohärenter* Demodulation:
$$p_B = 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-E_B/(2N_0)}.$$
- **Binary Phase Shift Keying** (BPSK), nur *kohärente* Demodulation möglich:
$$p_B = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right).$$

Bei BPSK muss das logarithmierte Verhältnis $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ mindestens 9.6 dB betragen, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert $p_B = 10^{-5}$ nicht überschreitet.

Bei binären Modulationsverfahren kann E_B auch durch E_S und p_B durch p_S ersetzt werden. Dann spricht man von der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S und der Symbolenergie E_S.

Hinweis: Die Aufgabe behandelt die Thematik von **Kapitel 4.4** und **Kapitel 4.5** des vorliegenden Buches „Digitalsignalübertragung". Weitere Informationen finden Sie im Buch „Modulationsverfahren". Verwenden Sie die Näherung $\lg(2) \approx 0.3$.

Fragebogen zu "Z4.18: FSK kohärent/nichtkohärent"

a) Welches E_B/N_0 ist bei FSK und kohärenter Demodulation erforderlich, damit die Forderung $p_B \le 10^{-5}$ erfüllt ist?

FSK, kohärent: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

b) Sind folgende Aussagen richtig: Man erhält das gleiche Ergebnis wie unter a)

- ☐ bei der kohärenten FSK mit Modulationsindex $\eta = 0.7$,
- ☐ bei der kohärenten FSK mit Modulationsindex $\eta = 1$?

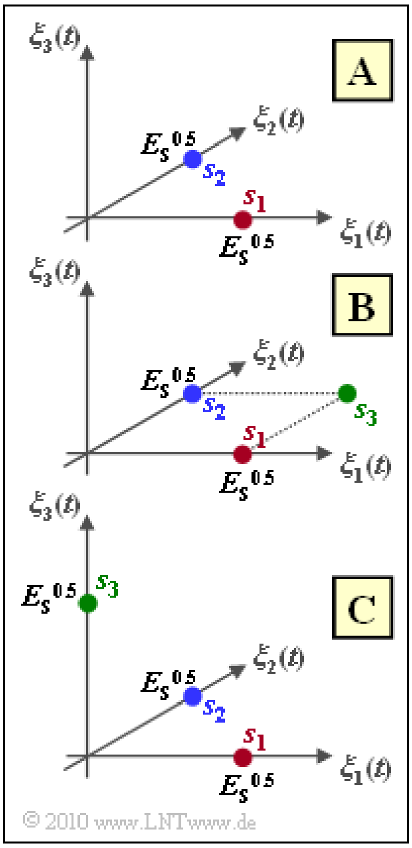
c) Welches E_B/N_0 ist bei FSK mit Modulationsindex $h = 1$ und nichtkohärenter Demodulation erforderlich, damit $p_B \le 10^{-5}$ erfüllt ist?

FSK, inkohärent: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$ dB für die FSK und nichtkohärente Demodulation?

p_B =

A4.19: Orthogonale mehrstufige FSK



Wir betrachten in dieser letzten Übungsaufgabe zu diesem Kapitel *Frequency Shift Keying* (FSK) mit M Signalformen und setzen voraus, dass diese paarweise zueinander orthogonal sind. In diesem Fall können die äquivalenten Tiefpass–Signale $s_i(t)$ mit $i = 1, ... , M$ in folgender Form dargestellt werden:

$$s_i(t) = \sqrt{E_S} \cdot \xi_i(t)\,.$$

$\xi_i(t)$ sind komplexe Basisfunktionen, für die allgemein $i = 1, ... , N$ gilt. Bei orthogonaler Signalisierung ist allerdings stets $M = N$.

Die Grafik zeigt drei verschiedene Signalraumkonstellationen. Jedoch beschreiben nicht alle drei eine orthogonale FSK. Hierauf wird in der Teilaufgabe a) Bezug genommen.

Im **Theorieteil** ist die exakte Formel für die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Entscheidung bei AWGN–Störung angegeben:

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{C}) \;=\; & \sum_{i=0}^{M-1}(-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \\ & \cdot \;\exp\left[-\frac{i}{(i+1)} \cdot \frac{E_S}{N_0}\right].\end{aligned}$$

Daraus lässt sich sehr einfach die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit berechnen:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = 1 - \Pr(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{M-1}(-1)^{i+1} \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \exp\left[-\frac{i}{(i+1)} \cdot \frac{E_S}{N_0}\right].$$

Eine obere Schranke ($p_{S,\,max} \ge p_S$) ergibt sich aufgrund der alternierenden Vorzeichen, wenn man von dieser Summe nur den ersten Term berücksichtigt:

$$p_{S,max} = \frac{M-1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)}\,.$$

In der Teilaufgabe d) soll diese Schranke bei gegebenem Verhältnis E_B/N_0 ausgewertet werden, wobei E_B die mittlere Signalenergie pro Bit angibt:

$$E_B = \frac{E_S}{\log_2(M)}\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Theorieseite** von Kapitel 4.5.

Fragebogen zu "A4.19: Orthogonale mehrstufige FSK"

a) Welche der obigen Signalraumkonstellationen gelten für orthogonale FSK?

- [ ] Konstellation A,
- [ ] Konstellation B,
- [ ] Konstellation C.

b) Berechnen Sie für $E_S/N_0 = 6$ die Fehlerwahrscheinlichkeit der binären, ternären und quaternären FSK. E_S bezeichnet die Symbolenergie.

$M = 2$: p_S =

$M = 3$: p_S =

$M = 4$: p_S =

c) Berechnen Sie die obere Schranke $p_{S,\,max}$ für $E_S/N_0 = 6$. E_S: Symbolenergie.

$E_S/N_0 = 6$, $M = 2$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 3$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 4$: $p_{S,\,max}$ =

d) Berechnen Sie die obere Schranke $p_{S,max}$ für $E_B/N_0 = 6$. E_B: Bitenergie.

$E_B/N_0 = 6$, $M = 2$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 3$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 4$: $p_{S,\,max}$ =