

A5.1: Fehlerabstandsverteilung

Ein jedes digitale Kanalmodell kann in gleicher Weise beschrieben werden durch

- die Fehlerfolge $\langle e_v \rangle$,
- durch die Fehlerabstandsfolge $\langle a_{v'} \rangle$.

Beispielhaft betrachten wir die Folgen

$$\begin{aligned} \langle e_v \rangle &= \langle 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle, \\ \langle a_{v'} \rangle &= \langle 2, 3, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 3, 4, 1, 2, \dots \rangle. \end{aligned}$$

| FAV | Modell M_1 | Modell M_2 |
|------------|--------------|--------------|
| $V_a(k=2)$ | 0.70 | 1.00 |
| $V_a(k=3)$ | 0.45 | 0.90 |
| $V_a(k=4)$ | 0.25 | 0.70 |
| $V_a(k=5)$ | 0.10 | 0.50 |
| $V_a(k=6)$ | 0.00 | 0.30 |

© 2009 www.LNTwww.de

Man erkennt daraus beispielsweise:

- Der Fehlerabstand $a_2 = 3$ bedeutet, dass zwischen dem ersten und dem zweiten Fehler zwei fehlerfreie Symbole liegen.
- $a_3 = 1$ deutet dagegen darauf hin, dass nach dem zweiten direkt ein dritter Fehler folgt.

Die unterschiedlichen Laufindizes (v und v' , jeweils beginnend mit 1) sind erforderlich, da keine Synchronität zwischen der Fehlerabstandsfolge und der Fehlerfolge besteht.

In der Grafik ist für zwei verschiedene Modelle M_1 und M_2 die Fehlerabstandsverteilung (FAV)

$$V_a(k) = \Pr(a \geq k) = 1 - \sum_{\kappa=1}^k \Pr(a = \kappa)$$

angegeben. Diese Tabelle soll in dieser Aufgabe ausgewertet werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.1**.

Fragebogen zu "A5.1: Fehlerabstandsverteilung"

a) Wie lauten die folgenden Fehlerwerte (0 oder 1)?

$$e_{16} =$$

$$e_{17} =$$

$$e_{18} =$$

b) Wie groß ist bei beiden Modellen $V_a(k=1)$?

$$V_a(k=1) =$$

c) Bestimmen Sie für das Modell M_1 die Wahrscheinlichkeiten der Fehlerabstände.

$$M_1: \Pr(a=1) =$$

$$M_1: \Pr(a=2) =$$

$$M_1: \Pr(a=3) =$$

$$M_1: \Pr(a=4) =$$

$$M_1: \Pr(a=5) =$$

d) Wie groß ist der maximal mögliche Fehlerabstand?

$$M_1: k_{\max} =$$

e) Berechnen Sie den mittleren Fehlerabstand.

$$M_1: E[a] =$$

f) Wie groß ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $p_M = E[e]$?

$$M_1: p_M =$$

g) Welche Aussagen stimmen für das Modell M_2 mit Sicherheit?

- Zwei Fehler können nicht direkt aufeinander folgen.
- Der häufigste Fehlerabstand ist $a=6$.
- Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit beträgt $p_M = 0.25$.

A5.2: Fehlerkorrelationsfunktion

Zur Charakterisierung von digitalen Kanalmodellen verwendet man unter Anderem

- die Fehlerkorrelationsfunktion (FKF)

$$\varphi_e(k) = E[e_\nu \cdot e_{\nu+k}], \quad k \geq 0,$$

- die Fehlerabstandswahrscheinlichkeiten

$$\Pr(a = k), \quad k \geq 1.$$

Hierbei bezeichnen

- $\langle e_\nu \rangle$ die Fehlerfolge mit $e_\nu \in \{0, 1\}$, und
- a den Fehlerabstand.

Zwei direkt aufeinanderfolgende Bitfehler werden somit durch den Fehlerabstand $a = 1$ gekennzeichnet.

Die Tabelle zeigt beispielhafte Werte der Fehlerabstandswahrscheinlichkeiten $\Pr(a = k)$ sowie der Fehlerkorrelationsfunktion $\varphi_e(k)$. Einige Angaben fehlen in der Tabelle. Diese Werte sollen aus den gegebenen Werten berechnet werden.

Hinweis: Die Aufgabe behandelt den Lehrstoff von **Kapitel 5.1**.

| k | $\Pr(a = k)$ | $\varphi_e(k)$ |
|-----|--------------|----------------|
| 0 | — | 0.1000 |
| 1 | 0.3091 | ????? |
| 2 | ????? | 0.0267 |
| 3 | 0.0940 | 0.0234 |
| 4 | 0.0558 | 0.0207 |
| 5 | 0.0357 | 0.0186 |
| 6 | 0.0251 | 0.0169 |
| 7 | 0.0193 | 0.0155 |
| 8 | 0.0160 | 0.0144 |

© 2009 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "A5.2: Fehlerkorrelationsfunktion"

a) Welcher Wert ergibt sich für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit?

$$p_M =$$

b) Welcher Wert ergibt sich für den mittleren Fehlerabstand?

$$E[a] =$$

c) Berechnen Sie den FKF-Wert für $k = 1$.

$$\varphi_e(k = 1) =$$

d) Welche Näherung gilt für die Wahrscheinlichkeit des Fehlerabstands $a = 2$?

$$\Pr(a = 2) =$$

A5.3: AWGN- und BSC-Modell

Die Grafik zeigt oben das analoge Kanalmodell eines digitalen Übertragungssystems, wobei das additive Rauschsignal $n(t)$ mit der Rauschleistungsdichte $N_0/2$ wirksam ist. Es handelt sich um AWGN-Rauschen. Die Varianz des Rauschanteils vor dem Entscheider (nach dem Matched-Filter) ist dann

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2T}$$

Weiter soll gelten:

- Es treten keine Impulsinterferenzen auf. Wurde das Symbol $q_\nu = \mathbf{H}$ gesendet, so ist der Nutzanteil des Detektionssignals gleich $+s_0$, bei $q_\nu = \mathbf{L}$ dagegen $-s_0$.
- Der Schwellenwertentscheider berücksichtigt eine Schwellendrift, das heißt, die Schwelle E kann durchaus vom Optimalwert $E = 0$ abweichen. Die *Entscheidungsregel* lautet:

$$v_\nu = \begin{cases} \mathbf{H} & \text{falls } d(\nu \cdot T) > E, \\ \mathbf{L} & \text{falls } d(\nu \cdot T) \leq E. \end{cases}$$

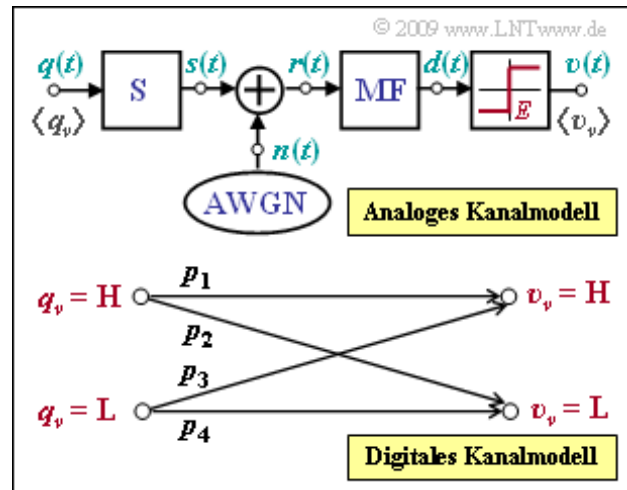
- Mit dem Schwellenwert $E = 0$ ergibt sich die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit zu

$$p_M = Q(s_0/\sigma) = 0.01.$$

Die untere Grafik zeigt ein digitales Kanalmodell, das durch die vier Übergangswahrscheinlichkeiten p_1 , p_2 , p_3 und p_4 charakterisiert ist. Dieses soll an das analoge Kanalmodell angepasst werden.

Hinweis: Die Aufgabe beschreibt das Themengebiet von **Kapitel 5.2**. Zahlenwerte der so genannten Q-Funktion können Sie mit dem folgenden Interaktionsmodul ermitteln:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen



Fragebogen zu "A5.3: AWGN- und BSC-Modell"

a) Welcher Quotient s_0/σ liegt dieser Aufgabe zugrunde?

$$s_0/\sigma =$$

b) Für die Schwelle gelte $E = 0$. Ist das vorliegende digitale Übertragungssystem durch das BSC-Modell beschreibbar, unter der Voraussetzung,

- dass die Quellensymbole **L** und **H** gleichwahrscheinlich sind,
- dass das Quellensymbol **L** deutlich häufiger auftritt als **H**?

c) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten für $E = +s_0/4$.

$$p_1 =$$

$$p_2 =$$

$$p_3 =$$

$$p_4 =$$

d) Nun gelte $E = +s_0/4$. Ist das vorliegende digitale Übertragungssystem durch das BSC-Modell beschreibbar, unter der Voraussetzung,

- dass die Quellensymbole **L** und **H** gleichwahrscheinlich sind,
- dass das Quellensymbol **L** deutlich häufiger auftritt als **H**?

e) Es gelte $p_L = \Pr(q_v = \mathbf{L})$ und $p_H = \Pr(q_v = \mathbf{H})$. Welche der folgenden Aussagen sind dann für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit zutreffend?

- p_M ist beim BSC-Modell ($E = 0$) unabhängig von p_L und p_H .
- p_M ist beim BSC-Modell ($E = 0$) für $p_L = p_H$ am kleinsten.
- Für $p_L = 0.9$, $p_H = 0.1$ und $E = +s_0/4$ ist p_M kleiner als 1%.

Z5.3: Analyse des BSC-Modells

Wir betrachten zwei verschiedene BSC-Modelle mit den folgenden Parametern:

- Modell M_1 : $p = 0.1$,
- Modell M_2 : $p = 0.02$.

Die Grafik zeigt eine Fehlerfolge der Länge $N = 1000$, wobei allerdings nicht bekannt ist, von welchem der beiden Modelle diese Folge stammt.

Die beiden Modelle sollen anhand

- der Fehlerabstandswahrscheinlichkeiten

$$\Pr(a = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p,$$

- der Fehlerabstandsverteilung

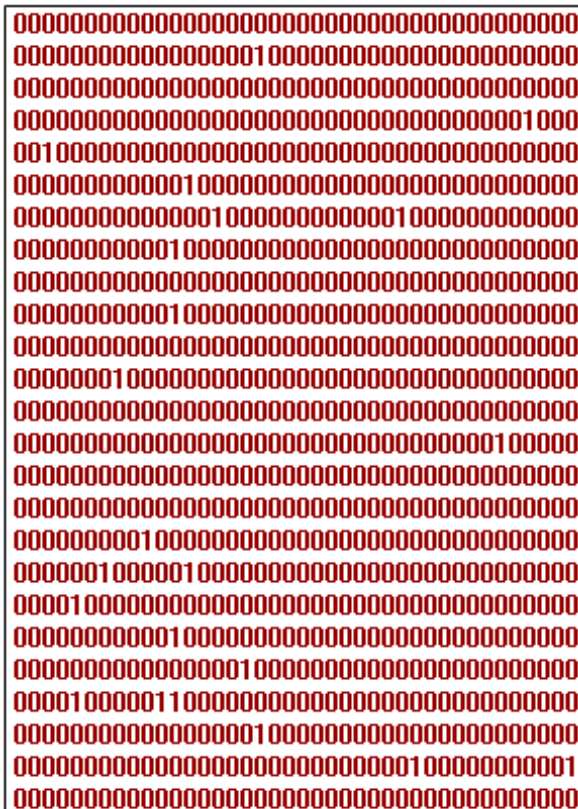
$$V_a(k) = \Pr(a \geq k) = (1 - p)^{k-1},$$

- der Fehlerkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \varphi_e(k) &= E[e_\nu \cdot e_{\nu+k}] = \\ &= \begin{cases} p & \text{für } k = 0, \\ p^2 & \text{für } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

analysiert werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.2**.



© 2009 www.lntwww.de

Fragebogen zu "Z5.3: Analyse des BSC-Modells"

a) Aus welchen Kenngrößen kann auf die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_M des BSC-Modells zurückgeschlossen werden?

- FKF-Wert $\varphi_e(k = 0)$,
- FKF-Wert $\varphi_e(k = 10)$,
- FAV-Wert $V_a(k = 1)$,
- FAV-Wert $V_a(k = 2)$,
- FAV-Wert $V_a(k = 10)$.

b) Von welchem Modell stammt die angegebene Fehlerfolge?

- Modell M_1 ,
- Modell M_2 .

c) Wie groß ist der mittlere Fehlerabstand von Modell M_1 ?

$$M_1: E[a] =$$

d) Wie groß sind für das Modell M_1 die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

$$M_1: \Pr(a = 1) =$$

$$M_1: \Pr(a = 2) =$$

$$M_1: \Pr(a = E[a]) =$$

e) Berechnen Sie für das Modell M_1 folgende Werte der Fehlerabstandsverteilung:

$$M_1: V_a(k = 2) =$$

$$M_1: V_a(k = 10) =$$

$$M_1: V_a(k = 11) =$$

A5.4: Ist das BSC-Modell erneuernd?

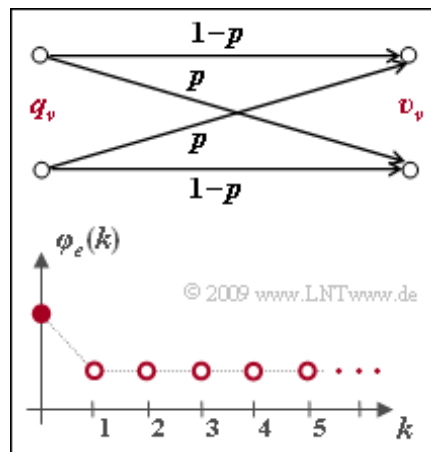
Zur Beschreibung von digitalen Kanalmodellen werden vorwiegend benutzt:

- die Fehlerabstandsverteilung (FAV)

$$V_a(k) = \Pr(a \geq k) = 1 - \sum_{\kappa=1}^k \Pr(a = \kappa),$$

- die Fehlerkorrelationsfunktion (FKF)

$$\varphi_e(k) = E[e_{\nu} \cdot e_{\nu+k}].$$



Für eine große Klasse von Kanalmodellen besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen diesen beiden Beschreibungsgrößen, nämlich

$$\varphi_e(k) = \begin{cases} \varphi_e(0) & \text{für } k = 0, \\ \sum_{\kappa=1}^k \Pr(a = \kappa) \cdot \varphi_e(k - \kappa) & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Man nennt solche Kanalmodelle **erneuernd**. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen die einzelnen Fehlerabstände statistisch voneinander unabhängig sind, so dass zur Generierung der Fehlerfolge der oft schnellere Weg über die Generierung der Fehlerabstände gegangen werden kann, wie in der **Aufgabe A5.5** beschrieben wird.

In dieser Aufgabe soll überprüft werden, ob das BSC-Modell gemäß der oberen Grafik erneuernd ist. Die Fehlerkorrelationsfunktion $\varphi_e(k)$ ist in der unteren Grafik dargestellt. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fehlerabstände sind beim BSC-Modell wie folgt gegeben:

$$\Pr(a = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 5.2**. Verwenden Sie für numerische Berechnungen den BSC-Parameter $p = 0.01$. Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_M hat dann den gleichen Wert.

Fragebogen zu "A5.4: Ist das BSC-Modell erneuernd?"

a) Berechnen Sie den FKF-Wert $\varphi_e(k = 0)$.

$$\varphi_e(k = 0) =$$

b) Berechnen Sie den FKF-Wert $\varphi_e(k = 1)$.

$$\varphi_e(k = 1) =$$

c) Wie groß ist der FKF-Wert $\varphi_e(k = 2)$?

$$\varphi_e(k = 2) =$$

d) Liefern Sie ein begründetes Resumé dieser Aufgabe.

- Das BSC-Modell ist erneuernd.
- Das BSC-Modell ist nicht erneuernd.

A5.5: Fehlerfolge und Fehlerabstandsfolge

Eine jede Fehlerfolge $\langle e_v \rangle$ kann man auch als die Folge $\langle a_n \rangle$ der Fehlerabstände angeben. Ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu groß, dann ergibt sich so ein geringerer Speicherbedarf als bei Speicherung der Fehlerfolge. Für den Vergleich in dieser Aufgabe soll von den folgenden Voraussetzungen ausgegangen werden:

- Abgespeichert werden soll jeweils eine Fehlerfolge mit der Länge $N = 10^6$ Elementen.
- Für die Speicherung von $\langle e_v \rangle$ soll die speichereffizienteste Methode (1 Bit pro Fehler) verwendet werden.
- Jeder Fehlerabstand wird durch 4 Byte (32 Bit) dargestellt.

Fehlerfolge:
00001000001000000010000000000
10000000000000000000000000000
00000000000000000100100000000
00000000000000000001100001001
10000000001000001000001000000
000100000000000001001000100001
000100000000100000000000100010
00000000101000000000000000000
00001001001100000000000000000
000000000000000000000100010000
* * *

Fehlerabstandsfolge:
5 6 8 12 47 3 30 1 5 3
1 11 6 6 10 14 3 4 5 4
9 12 4 10 2 24 3 3 1 41
9 . . .

© 2009 www.LNTwww.de

Ist das zugrundeliegende Kanalmodell erneuernd wie zum Beispiel das BSC-Modell, so können zur Generierung der Fehlerfolge $\langle e_v \rangle$ auf einem Digitalrechner zwei unterschiedliche Methoden angewandt werden:

- die symbolweise Erzeugung der Fehler, beim BSC-Modell gemäß den Wahrscheinlichkeiten p (Fehler) und $1 - p$ (kein Fehler),
- die Erzeugung der Fehlerabstände, beim BSC-Modell entsprechend der **Binominalverteilung**.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.2**. Bei den folgenden Fragen gibt G_e die erforderliche Dateigröße (in Byte) zur Abspeicherung der Fehlerfolge $\langle e_v \rangle$ und G_a (ebenfalls in Byte) die Dateigröße bei Abspeicherung der Fehlerabstände an.

Fragebogen zu "A5.5: Fehlerfolge und Fehlerabstandsfolge"

a) Wieviel Speicherplatz (in Byte) wird benötigt, wenn man eine Fehlerfolge der Länge $N = 10^6$ direkt abspeichert?

$$G_e = \text{Byte}$$

b) Wie groß wird die Dateigröße in etwa bei Speicherung der Fehlerabstände? Es gelte $p_M = 10^{-3}$.

$$p_M = 10^{-3}: G_a = \text{Byte}$$

c) Wie groß wird die Datei bei Speicherung der Fehlerabstände mit $p_M = 0.5$?

$$p_M = 0.5: G_a = \text{Byte}$$

d) Geben Sie die Grenze $p_{M, \max}$ der BSC-Fehlerwahrscheinlichkeit an, bei der die Speicherung als Fehlerabstandsfolge sinnvoll ist.

$$p_{M, \max} =$$

A5.6: Fehlerkorrelationsdauer

Die Grafik zeigt die Fehlerkorrelationsfunktion (FKF) des Gilbert–Elliott–Modells mit den Parametern

$$p_G = 0.001, \quad p_B = 0.1,$$

$$\Pr(G|B) = 0.1, \quad \Pr(B|G) = 0.01$$

in logarithmierter Darstellung.

Dieses Modell wird in der **Aufgabe Z5.6** ausführlich behandelt. Insbesondere wird in dieser Aufgabe auch die Fehlerkorrelationsfunktion (FKF) berechnet. Mit den Hilfsgrößen

$$A = (p_B - p_M) \cdot (p_M - p_G),$$

$$B = \Pr(B|G) + \Pr(G|B)$$

kann für diese geschrieben werden:

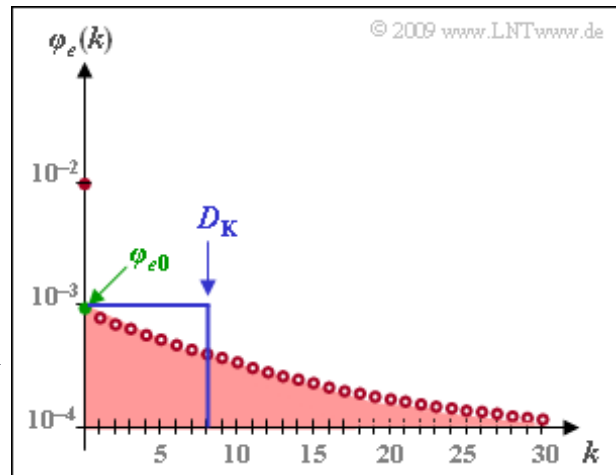
$$\varphi_e(k) = \begin{cases} p_M & \text{für } k = 0, \\ p_M^2 + A \cdot (1 - B)^k & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Hierbei handelt es sich um einen Bündelfehlerkanal. Zur quantitativen Beschreibung der statistischen Bindungen verwendet man oft die Korrelationsdauer gemäß der folgenden Definition:

$$D_K = \frac{1}{\varphi_{e0} - p_M^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_e(k) - p_M^2].$$

Der Bezugswert φ_{e0} ergibt sich dabei durch *Extrapolation* der Fehlerkorrelationsfunktion in den Punkt $k = 0$. Ist wie hier der FKF–Verlauf analytisch gegeben, so kann man φ_{e0} auch dadurch berechnen, dass man in die eigentlich nur für $k > 0$ gültige Gleichung den Wert $k = 0$ einsetzt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.3**.



Fragebogen zu "A5.6: Fehlerkorrelationsdauer"

a) Welcher FKF-Wert gilt exakt für $k = 0$?

$$\varphi_e(k=0) =$$

b) Wie groß ist der aus der gegebenen FKF extrapolierte Wert für $k = 0$?

$$\varphi_{e0} =$$

c) Welches Ergebnis erhält man für die Fehlerkorrelationsdauer D_K mit den vorne definierten Größen A und B ?

$D_K = A \cdot B,$

$D_K = 1/A - B,$

$D_K = 1/B - 1.$

d) Welche Korrelationsdauer ergibt sich beim vorliegenden GE-Modell?

$$D_K =$$

e) Welche Aussagen gelten bezüglich der Korrelationsdauer D_K des GE-Modells?
Beachten Sie für Ihre Antwort die logarithmische Ordinate.

D_K bleibt gleich, wenn man $\Pr(B|G)$ und $\Pr(G|B)$ vertauscht.

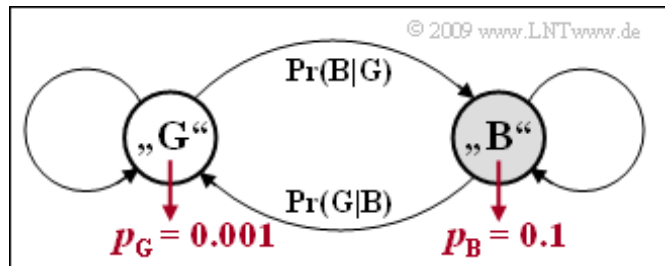
D_K hängt nur von der Summe $\Pr(G|B) + \Pr(B|G)$ ab.

Die rote Fläche in der Grafik ist gleich der blauen Rechteckfläche.

Z5.6: GE-Modelleigenschaften

Wir betrachten das *Bündelfehler-Kanalmodell* nach E.N. Gilbert und E.O. Elliott (siehe Skizze). Für die Übergangswahrscheinlichkeiten soll dabei gelten:

$$\Pr(G|B) = 0.1, \quad \Pr(B|G) = 0.01.$$



Die Fehlerwahrscheinlichkeit im Zustand „GOOD“ betrage $p_G = 0.1\%$ und für die im Zustand „BAD“ gelte $p_B = 10\%$. Im Verlaufe dieser Aufgabe sollen weitere Kenngrößen ermittelt werden:

- die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_M ,
- die Zustandswahrscheinlichkeiten $w_G = \Pr(Z = G)$ und $w_B = \Pr(Z = B)$,
- die Werte der Korrelationsfunktion, die für $k > 0$ analytisch wie folgt gegeben ist:

$$\varphi_e(k) = p_M^2 + (p_B - p_M) \cdot (p_M - p_G) \cdot [1 - \Pr(B|G) - \Pr(G|B)]^k.$$

Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 5.3** des vorliegenden Buches sowie auf das **Kapitel 1.4** im Buch „Stochastische Signaltheorie“.

Fragebogen zu "Z5.6: GE-Modelleigenschaften"

a) Wie lauten die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten?

$$\Pr(G|G) =$$

$$\Pr(B|B) =$$

b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten befindet sich das GE-Modell im Zustand „GOOD“ (w_G) bzw. im Zustand „BAD“ (w_B)?

$$w_G =$$

$$w_B =$$

c) Berechnen Sie die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit.

$$p_M =$$

d) Berechnen Sie die folgenden FKF-Werte:

$$\varphi_e(k=1) =$$

$$\varphi_e(k=2) =$$

$$\varphi_e(k=5) =$$

$$\varphi_e(k=50) =$$

e) Wie groß ist der FKF-Wert $\varphi_e(k=0)$?

$$\varphi_e(k=0) =$$

f) Lässt sich die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $p_M = 0.005$ erreichen durch

- alleinige Änderung von p_G ,
- alleinige Änderung von p_B ,
- alleinige Änderung von $\Pr(G|B)$,
- alleinige Änderung von $\Pr(B|G)$?

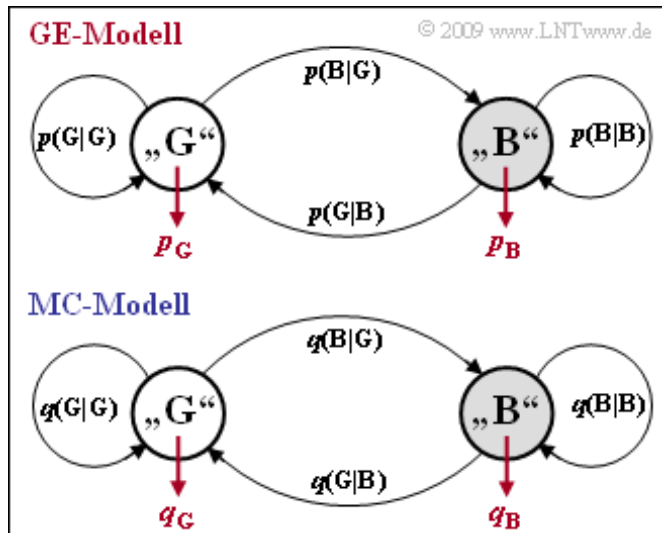
A5.7: MC- aus GE-Parameter

In Aufgabe A5.6 und Aufgabe Z5.6 wurden jeweils das GE-Modell mit den Parameterwerten

$$p_G = 0.001, \quad p_B = 0.1,$$

$$\Pr(G|B) = 0.1, \quad \Pr(B|G) = 0.01.$$

genauer untersucht. Gegenüber diesen Aufgaben werden nun die Übergangswahrscheinlichkeiten umbenannt, beispielsweise wird $p(B|G)$ anstelle von $\Pr(B|G)$ geschrieben. In der oberen Grafik ist diese Umbenennung bereits vorgenommen.



Die untere Grafik zeigt das MC-Modell von

McCullough. Dieses besitzt die genau gleiche Struktur wie das GE-Modell, doch werden nun alle Wahrscheinlichkeiten mit „ q “ anstelle von „ p “ bezeichnet. Beispielsweise bezeichnet beim MC-Modell $q(B|G)$ die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand „G“ in den Zustand „B“ unter der Voraussetzung, dass im Zustand „G“ gerade ein Fehler aufgetreten ist. Der GE-Parameter $p(B|G)$ kennzeichnet dagegen diese Übergangswahrscheinlichkeit ohne Zusatzbedingung.

Die Parameter des GE-Modells $\Rightarrow p_G, p_B, p(B|G), p(G|B)$ können so in die entsprechenden MC-Parameter $q_G, q_B, q(B|G)$ und $q(G|B)$ umgerechnet werden, dass eine in ihren statistischen Eigenschaften gleiche Fehlerfolge wie beim GE-Modell erzeugt wird, allerdings nicht die identische Folge.

Die Umrechnungsgleichungen lauten:

$$q_G = 1 - \beta_G, \quad q_B = 1 - \beta_B,$$

$$q(B|G) = \frac{\alpha_B \cdot [\Pr(B|G) + \Pr(G|B)]}{\alpha_G \cdot q_B + \alpha_B \cdot q_G},$$

$$q(G|B) = \frac{\alpha_G}{\alpha_B} \cdot q(B|G).$$

Hierbei sind die folgenden Hilfsgrößen verwendet:

$$u_{GG} = \Pr(G|G) \cdot (1 - p_G), \quad u_{GB} = \Pr(B|G) \cdot (1 - p_G),$$

$$u_{BB} = \Pr(B|B) \cdot (1 - p_B), \quad u_{BG} = \Pr(G|B) \cdot (1 - p_B)$$

$$\Rightarrow \beta_G = \frac{u_{GG} + u_{BB} + \sqrt{(u_{GG} - u_{BB})^2 + 4 \cdot u_{GB} \cdot u_{BG}}}{2},$$

$$\beta_B = \frac{u_{GG} + u_{BB} - \sqrt{(u_{GG} - u_{BB})^2 + 4 \cdot u_{GB} \cdot u_{BG}}}{2},$$

$$x_G = \frac{u_{BG}}{\beta_G - u_{BB}}, \quad x_B = \frac{u_{BG}}{\beta_B - u_{BB}}$$

$$\Rightarrow \alpha_G = \frac{(w_G \cdot p_G + w_B \cdot p_B \cdot x_G)(x_B - 1)}{p_M \cdot (x_B - x_G)}, \quad \alpha_B = 1 - \alpha_G.$$

w_G und w_B sind die Zustandswahrscheinlichkeiten für „GOOD“ und „BAD“ des GE-Modells. In der

Aufgabe Z5.6 wurden diese wie folgt berechnet:

$$w_G = 10/11, \quad w_B = 1/11.$$

Die entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten des MC-Modells sind α_G und α_B .

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.3**. In der nachfolgenden **Aufgabe Z5.7** werden die wichtigsten Beschreibungsgrößen wie

- Fehlerkorrelationsfunktion,
- Korrelationsdauer,
- mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit und
- Fehlerabstandsverteilung

direkt aus den MC-Parametern berechnet.

Fragebogen zu "A5.7: MC- aus GE-Parameter"

a) Berechnen Sie die folgenden Hilfsgrößen:

$$u_{GG} =$$

$$u_{BG} =$$

$$u_{GB} =$$

$$u_{BB} =$$

$$\beta_G =$$

$$\beta_B =$$

b) Wie lauten die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten des MC-Modells?

$$q_G =$$

$$q_B =$$

c) Berechnen Sie die weiteren Hilfsgrößen:

$$x_G =$$

$$x_B =$$

$$\alpha_G =$$

$$\alpha_B =$$

d) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des MC-Modells:

$$q(\mathbf{B}|\mathbf{G}) =$$

$$q(\mathbf{G}|\mathbf{B}) =$$

Z5.7: Nochmals MC-Modell

Wir betrachten wie auch in den Aufgaben A5.6, Z5.6 und A5.7 das Bündelfehler-Kanalmodell nach Gilbert und Elliott (GE-Modell) mit den Kenngrößen

$$p_G = 0.001, \quad p_B = 0.1, \\ p(G|B) = 0.1, \quad p(B|G) = 0.01.$$

Aus diesen vier Wahrscheinlichkeiten lassen sich die entsprechenden Kenngrößen des Kanalmodells nach McCullough (MC-Modell) so ermitteln, dass beide Modelle die genau gleichen statistischen Eigenschaften besitzen, nämlich

- exakt gleiche Fehlerabstandsverteilung $V_a(k)$,
- exakt gleiche Fehlerkorrelationsfunktion $\varphi_e(k)$.

Die Wahrscheinlichkeiten des MC-Modells wurden in der **Aufgabe A5.7** wie folgt ermittelt (Bezeichnungen entsprechend der Grafik zur Aufgabe A5.7, alle mit „ q “ anstelle von „ p “):

$$q_G = 0.0061, \quad q_B = 0.1949, \\ q(G|B) = 0.5528, \quad q(B|G) = 0.3724.$$

Die obere Grafik zeigt die aus $N = 10^6$ Folgeelementen simulativ ermittelten Funktionen $V_a(k)$ und $\varphi_e(k)$ für das GE- und das MC-Modell. Hier ergeben sich noch leichte Abweichungen. Im Grenzfalle für $N \rightarrow \infty$ stimmen dagegen Fehlerkorrelationsfunktion und Fehlerabstandsverteilung beider Modelle exakt überein.

In dieser Aufgabe sollen nun wichtige Beschreibungsgrößen wie Zustandswahrscheinlichkeiten, mittlere Fehlerwahrscheinlichkeiten und Korrelationsdauer direkt aus den q -Parametern des MC-Modells ermittelt werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.3**. Aus den oben genannten Aufgaben können folgende Ergebnisse weiterverwendet werden:

- Die Zustandswahrscheinlichkeiten des GE-Modells sind

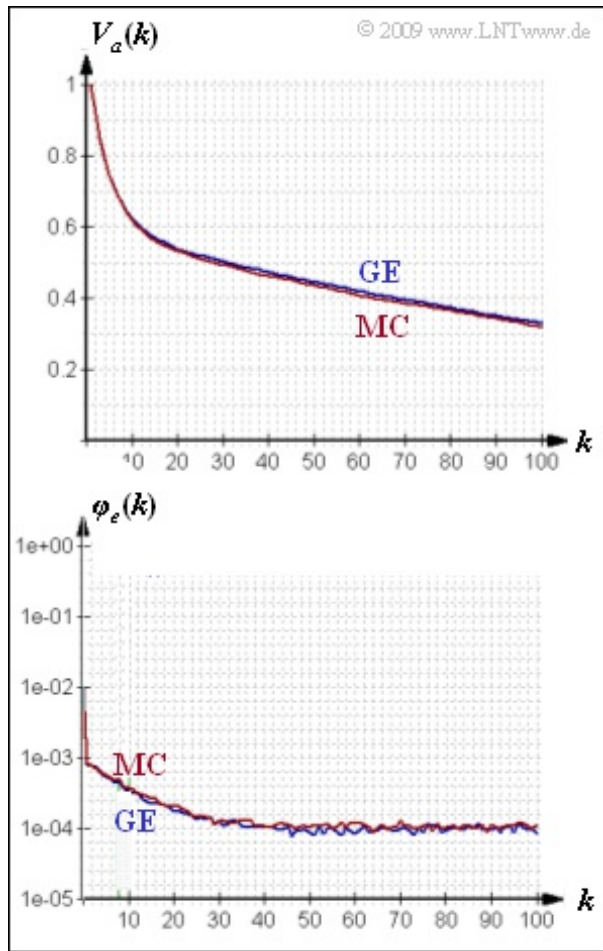
$$w_G = \frac{p(G|B)}{p(G|B) + p(B|G)}, \quad w_B = 1 - w_G.$$

- Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit des GE-Modells beträgt

$$p_M = w_G \cdot p_G + w_B \cdot p_B = \varphi_e(k=0).$$

- Die Korrelationsdauer des GE-Modells berechnet sich zu

$$D_K = \frac{1}{\Pr(G|B) + \Pr(B|G)} - 1.$$



Fragebogen zu "Z5.7: Nochmals MC-Modell"

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten α_G und α_B , dass sich das MC-Modell im Zustand „G“ bzw. im Zustand „B“ befindet.

$$\alpha_G =$$

$$\alpha_B =$$

b) Ermitteln Sie den mittleren Fehlerabstand des MC-Modells.

$$E[\mathbf{a}] =$$

c) Wie groß ist der FKF-Wert für $k = 0$?

$$\varphi_e(\mathbf{k} = \mathbf{0}) =$$

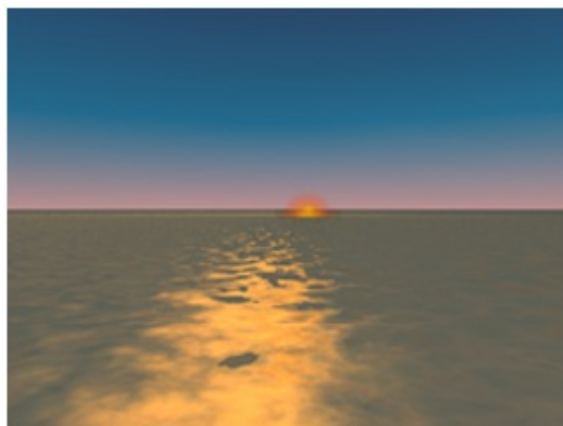
d) Geben Sie die Fehlerkorrelationsdauer D_K als Funktion der MC-Parameter q_G , q_B , $q(G|B)$ und $q(B|G)$ an. Welches Ergebnis ist richtig?

$D_K = [q(B|G) + q(G|B)]^{-1} - 1,$

$D_K = [q_G \cdot q(G|B) + q_B \cdot q(G|B)]^{-1} - 1.$

A5.8: BMP-Format

Ein Bitmap ist ein Bildformat, bei dem die einzelnen Pixel (von *Picture Elements*) in Matrixform abgespeichert werden. Der Header einer solchen BMP-Datei umfasst mindestens 54 Byte, bestehend aus dem Dateikopf (in Hexadezimaldarstellung von 0x00 bis 0x0D) sowie dem Informationsblock ab 0x0E. Anschließend folgen die Bilddaten, bei Farbbildern mit den Farbkomponenten R – G – B.



© 2009 www.LNTwww.de

Der nachfolgende Hexdump beschreibt das Foto „Sunset.bmp“. Dargestellt sind die ersten und letzten 96 der insgesamt 176456 Byte in Hexadezimaldarstellung.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0x 00 00 00 | 42 | 4D | 48 | B1 | 02 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 36 | 00 | 00 | 00 | 28 | 00 | 00 |
| 0x 00 00 10 | 00 | 00 | 18 | 01 | 00 | 00 | D2 | 00 | 00 | 00 | 01 | 00 | 18 | 00 | 00 | 00 | 10 |
| 0x 00 00 20 | 00 | 00 | 12 | B1 | 02 | 00 | C3 | 0E | 00 | 00 | EA | 0E | 00 | 00 | 00 | 00 | 20 |
| 0x 00 00 30 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 71 | 6C | 76 | 57 | 5F | 63 | 50 | 5F | 60 | 53 | 30 |
| 0x 00 00 40 | 61 | 64 | 53 | 61 | 64 | 54 | 62 | 64 | 54 | 62 | 64 | 54 | 63 | 65 | 54 | 63 | 40 |
| 0x 00 00 50 | 65 | 54 | 63 | 65 | 54 | 63 | 65 | 54 | 63 | 65 | 54 | 63 | 65 | 54 | 63 | 64 | 50 |
| | | | | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| 0x 02 B0 F0 | 4F | 28 | 70 | 4F | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 4F | F0 |
| 0x 02 B1 00 | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 4F | 28 | 71 | 50 | 28 | 71 | 50 | 28 | 00 |
| 0x 02 B1 10 | 71 | 50 | 28 | 71 | 50 | 28 | 72 | 50 | 28 | 72 | 50 | 28 | 72 | 50 | 28 | 72 | 10 |
| 0x 02 B1 20 | 50 | 28 | 72 | 50 | 28 | 72 | 51 | 28 | 72 | 51 | 28 | 72 | 51 | 28 | 73 | 51 | 20 |
| 0x 02 B1 30 | 28 | 73 | 51 | 28 | 73 | 51 | 28 | 73 | 51 | 28 | 73 | 51 | 28 | 73 | 51 | 28 | 30 |
| 0x 02 B1 40 | 73 | 51 | 28 | 73 | 52 | 28 | 00 | 00 | | | | | | | | | 40 |

Der **Dateikopf** beinhaltet folgende Informationen (der Präfix 0x zeigt die Hexadezimaldarstellung an):

- 0x00 ... 0x01 (2 Byte) BMP-Kennung: 0x 42 4D ⇒ „BM“,
- 0x02 ... 0x05 (4 Byte) Dateigröße in Byte,
- 0x06 ... 0x09 (5 Byte) reserviert (muss immer mit 0 belegt sein),
- 0x0A ... 0x0D (4 Byte) Offset (Beginn der Bilddaten).

Diese Angaben gelten nur für den Intel-Prozessor, der nach der *Little-Endian-Byteanordnung* vom niederwertigsten (LSB) zum höchstwertigen (MSB) Byte liest. Die Anordnung 48 B1 02 00 der Bytes 2, 3, 4 und 5 ist somit als 0x 00 02 B1 48 zu interpretieren, was der Dezimalzahl 176456 entspricht.

Der **40 Byte-Informationsblock** beinhaltet folgende Werte:

- 0x0E ... 0x11 (4 Byte) Länge des Info-Blocks,
- 0x12 ... 0x15 (4 Byte) Bildbreite in Pixel,
- 0x16 ... 0x19 (4 Byte) Bildhöhe in Pixel,
- 0x1A ... 0x1B (2 Byte) Anzahl der Farbebenen (immer auf 1 gesetzt),
- 0x1C ... 0x1D (2 Byte) Bits per Pixel (BPP),
- 0x1E ... 0x21 (4 Byte) Art der Datenkomprimierung,
- 0x22 ... 0x25 (4 Byte) Größe der Bitmap in Byte,
- 0x26 ... 0x29 (4 Byte) Horizontalauflösung in Pixel/Meter,

- 0x2A ... 0x2D (4 Byte) Vertikalauflösung in Pixel/Meter,
- 0x2E ... 0x31 (4 Byte) Anzahl der verwendeten Farben,
- 0x32 ... 0x35 (4 Byte) Anzahl der wichtigen Farben.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.4.**

Fragebogen zu "A5.8: BMP-Format"

a) Welches Bildformat hat das Bild „Sunset.bmp“?

Breite = Pixel

Höhe = Pixel

b) Wie groß ist die Farbtiefe in BPP (bit per pixel)?

Farbtiefe = BPP

c) Wie groß ist die vertikale Auflösung in dpi (dot per inch); 1 inch = 25.4 mm.

vertikale Auflösung = dpi

d) Wieviele Byte (N_{Info}) umfasst hier der Informationsblock? Ab welchem Byte (Offset) beginnen die Bilddaten?

N_{Info} = (dezimal)

Offset = (dezimal)

e) Wie lauten die Dezimalwerte der Farbkomponenten des linken oberen Pixels?

R = (dezimal)

G = (dezimal)

B = (dezimal)

Z5.8: Verfälschung von BMP-Bildern

Wir gehen hier von den folgenden Bildern im Format 160x120 aus:

- dem Bild „Weiß“ mit der Farbtiefe 1 BPP (ein Bit per Pixel) und
- dem Bild „Erde“ mit 24 BPP, auch wenn hier nur wenige der 2^{24} möglichen Farben genutzt werden.

Das Bild „W1“ ist durch Verfälschung mit einem Gilbert–Elliott–Modell unter Verwendung folgender Parameter entstanden:

$$p_G = 0.001, \quad p_B = 0.1, \\ \Pr(G|B) = 0.1, \quad \Pr(B|G) = 0.01.$$

Damit erhält man für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_M = \frac{p_G \cdot \Pr(G|B) + p_B \cdot \Pr(B|G)}{\Pr(G|B) + \Pr(B|G)} = 0.01,$$

und für die Fehlerkorrelationsdauer

$$D_K = \frac{1}{\Pr(G|B) + \Pr(B|G)} - 1 \approx 8.$$

Das Bild „W2“ entstand nach Verfälschung mit den GE–Parametern

$$p_B = 0.2, \quad \Pr(G|B) = 0.01, \quad \Pr(B|G) = 0.0005.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit im Zustand „G“ wurde so gewählt, dass sich die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ebenfalls zu $p_M = 0.01$ ergibt.

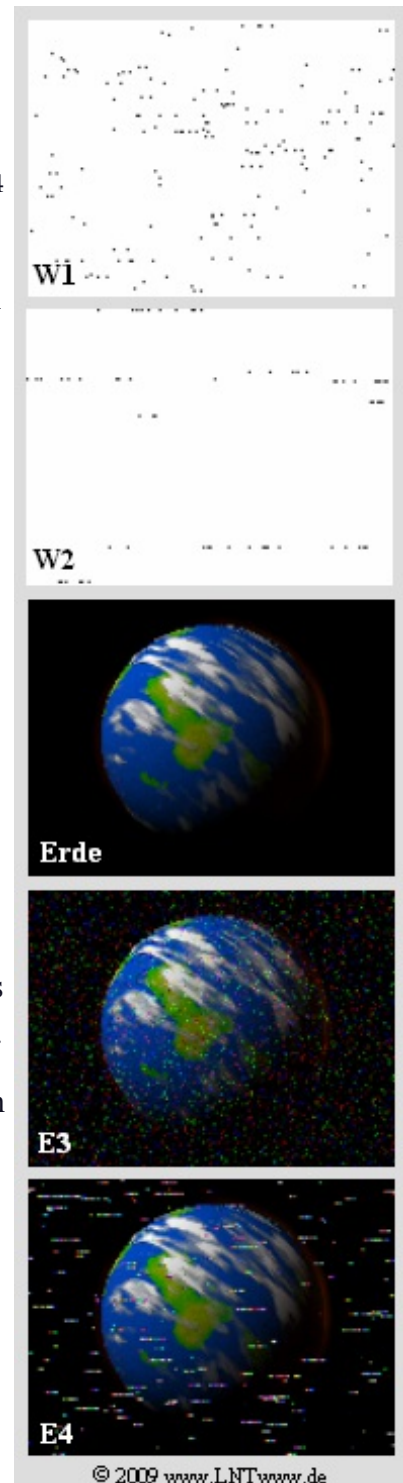
Die beiden unteren Bilder „E3“ und „E4“ können entstanden sein durch Verfälschung mit

- dem BSC–Modell ($p = 0.01$),
- dem gleichen GE–Modell, das zu „W1“ geführt hat,
- dem gleichen GE–Modell, das zu „W2“ geführt hat.

Dies zu klären, ist Ihre Aufgabe. Eine der Antworten ist jeweils richtig.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 5.4**.

Alle Bilder wurden mit dem Windows–Programm **Digitale Kanalmodelle & Multimedia** erzeugt. Der angegebene Link verweist auf die Zip–Version dieses Programms.



Fragebogen zu "Z5.8: Verfälschung von BMP-Bildern"

a) Ermitteln Sie für das GE-verfälschte Bild „W2“ die Fehlerwahrscheinlichkeit im Zustand „GOOD“, so dass sich $p_M = 0.01$ ergibt?

$$\mathbf{W2: } p_G =$$

b) Wie groß ist die Korrelationsdauer der Fehler im Bild „W2“?

$$\mathbf{W2: } D_K =$$

c) Wieviele Bitfehler treten (statistisch gesehen) im Bild „W2“ auf?

$$\mathbf{W2: } N_c =$$

d) Wieviele Bitfehler treten im Bild „E3“ (oder „E4“) bei $p_M = 0.01$ auf?

$$\mathbf{E3 \ bzw. \ E4: } N_d =$$

e) Welches Fehlermodell liegt dem Bild „E3“ zugrunde?

- BSC-Modell mit $p = 0.01$,
- gleiches GE-Modell wie für „W1“,
- gleiches GE-Modell wie für „W2“.

f) Welches Fehlermodell liegt dem Bild „E4“ zugrunde?

- BSC-Modell mit $p = 0.01$,
- gleiches GE-Modell wie für „W1“,
- gleiches GE-Modell wie für „W2“.