

## Musterlösung zur Aufgabe A1.1

a) Man erkennt direkt aus der Grafik, dass das Profil (A) mit den beiden linearen Abschnitten beim „Breakpoint“ ( $d = 100$  m) das folgende Ergebnis liefert:

$$V_P(d = 100 \text{ m}) = \underline{50 \text{ dB}}.$$

b) Mit dem Profil (B) erhält man dagegen bei Verwendung von  $V_0 = 10$  dB,  $\gamma_0 = 2$  und  $\gamma_1 = 4$ :

$$V_P(d = 100 \text{ m}) = 10 \text{ dB} + 20 \text{ dB} \cdot \lg(100) + 20 \text{ dB} \cdot \lg(2) \approx \underline{56 \text{ dB}}.$$

c) Die Antennengewinne vom Sender (+17 dB) und Empfänger (−3 dB) sowie die internen Verluste der Basisstation (+4 dB) können zusammengefasst werden zu

$$\begin{aligned} 10 \cdot \lg G &= 10 \cdot \lg G_S + 10 \cdot \lg G_E - 10 \cdot \lg V_{\text{Zus}} = \\ &= 17 \text{ dB} - 3 \text{ dB} - 4 \text{ dB} = 10 \text{ dB} \Rightarrow G = 10. \end{aligned}$$

Für das Profil (A) ergab sich folgender Pfadverlust:

$$V_P(d = 100 \text{ m}) = 50 \text{ dB} \Rightarrow K_P = 10^5.$$

Damit erhält man für die Empfangsleistung nach 100 Metern:

$$P_E(d = 100 \text{ m}) = \frac{P_S \cdot G}{K_P} = \frac{5 \text{ W} \cdot 10}{10^5} = \underline{0.5 \text{ mW}}.$$

Bei Profil (B) ist die Empfangsleistung etwa um den Faktor 4 kleiner:

$$P_E(d = 100 \text{ m}) = \frac{5 \text{ W} \cdot 10}{10^{5.6}} \approx \frac{5 \text{ W} \cdot 10}{4 \cdot 10^5} = \underline{0.125 \text{ mW}}.$$

d) Unterhalb des Breakpoints ( $d < 100$  m) ist die Abweichung durch den letzten Summand von Profil (B) bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta V_P(d = 50 \text{ m}) &= (\gamma_1 - \gamma_0) \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(1 + d/d_{\text{BP}}) = \\ &= (4 - 2) \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(1.5) \approx \underline{3.5 \text{ dB}}. \end{aligned}$$

e) Hier liefert das Profil (A) mit  $V_{\text{BP}} = 50$  dB:

$$V_P(d = 200 \text{ m}) = 50 \text{ dB} + 4 \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(2) \approx 62 \text{ dB}.$$

Dagegen führt das Profil (B) zum Ergebnis:

$$\begin{aligned} V_P(d = 200 \text{ m}) &= 50 \text{ dB} + 20 \text{ dB} \cdot \lg(200) + 20 \text{ dB} \cdot \lg(3) = \\ &= 10 \text{ dB} + 46 \text{ dB} + 9.5 \text{ dB} \approx 65.5 \text{ dB} \\ \Rightarrow \Delta V_P(d = 200 \text{ m}) &= 65.5 \text{ dB} - 62 \text{ dB} \approx \underline{3.5 \text{ dB}}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass  $\Delta V_P$  nahezu symmetrisch zu  $d = d_{\text{BP}}$  ist, wenn man die Entfernung  $d$  wie in der angegebenen Grafik logarithmisch aufträgt.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.1

a) Die (einfachste) Pfadverlustgleichung lautet:

$$V_P(d) = V_0 + \gamma \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0).$$

Beim Szenario (A) beträgt der Abfall pro Dekade (zum Beispiel zwischen  $d_0 = 1 \text{ m}$  und  $d = 10 \text{ m}$ ) genau 20 dB und beim Szenario (B) 25 dB. Daraus folgt:

$$\gamma_A \equiv 2, \quad \gamma_B \equiv 2.5.$$

b) Richtig ist Lösungsvorschlag 1, da die Freiraumdämpfung durch den Pfadverlustexponenten  $\gamma = 2$  gekennzeichnet ist.

c) Der Pfadverlust bei  $d_0 = 1 \text{ m}$  ist in beiden Fällen  $V_0 = 20 \text{ dB}$ . Beim Szenario (A) gilt weiter:

$$10 \cdot \lg \left[ \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda_A} \right]^2 = 20 \text{ dB} \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda_A} = 10 \Rightarrow \lambda_A = 4\pi \cdot 0.1 \text{ m} = 1.257 \text{ m}.$$

Die Frequenz  $f_A$  hängt mit der Wellenlänge  $\lambda_A$  über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  zusammen:

$$f_A = \frac{c}{\lambda_A} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1.257 \text{ m}} = 2.39 \cdot 10^8 \text{ Hz} \approx \underline{240 \text{ MHz}}.$$

Dagegen gilt für das Szenario (B):

$$\begin{aligned} 10 \cdot \lg \left[ \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda_B} \right]^{2.5} &= 20 \text{ dB} \Rightarrow 25 \cdot \lg \left[ \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda_B} \right] = 20 \text{ dB} \\ \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda_B} &= 10^{0.8} \approx 6.31 \Rightarrow \lambda_B = \frac{10}{6.31} \cdot \lambda_A \\ \Rightarrow f_B &= \frac{6.31}{10} \cdot f_A = 0.631 \cdot 240 \text{ MHz} \approx \underline{151.4 \text{ MHz}}. \end{aligned}$$

d) Richtig ist der erste Lösungsvorschlag. Beim Freiraum-Szenario (A) beträgt die Fraunhofer-Distanz  $d_F = \lambda_A/2 \approx 63 \text{ cm}$ . Es gilt also stets  $d > d_F$ . Auch beim Szenario (B) ist wegen  $\lambda_B \approx 2 \text{ m}$  bzw.  $d_F \approx 1 \text{ m}$  der gesamte dargestellte Verlauf richtig.

## Musterl鰏ung zur Aufgabe A1.2

**a)** Aus dem dB-Wert  $V_0 = 80$  dB folgt der absolute (lineare) Wert  $K_0 = 10^8$ . Damit betr채gt die Empfangsleistung  $P_E = P_S/K_0 = 10 \text{ W}/10^8 = 100 \text{ nW} > 10 \text{ pW}$ . Richtig ist demnach JA.

Man kann dieses Problem auch direkt mit den logarithmischen Gr鰏en l鰏en:

$$10 \cdot \lg \frac{P_E}{1 \text{ mW}} = 10 \cdot \lg \frac{P_S}{1 \text{ mW}} - V_0 = 40 \text{ dBm} - 80 \text{ dB} = -40 \text{ dBm}.$$

Gefordert ist aber lediglich der Grenzwert  $-80$  dBm.

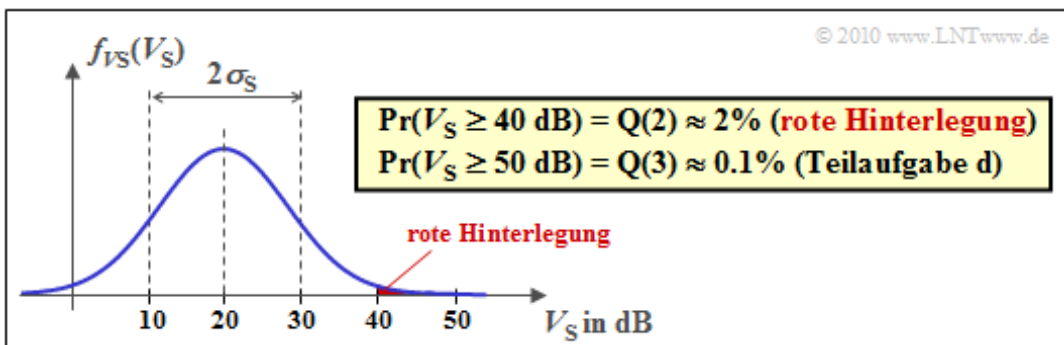
**b)** Lognormal-Fading mit  $\sigma_S = 0$  dB ist gleichbedeutend mit einer konstanten Empfangsleistung  $P_E$ . Gegenüber Teilaufgabe a) ist diese um  $m_S = 20$  dB kleiner  $\Rightarrow P_E = -60$  dBm. Sie ist aber immer noch gr鰏er als der vorgegebene Grenzwert ( $-80$  dBm). Daraus folgt: Das System ist zu 100% funktionsf채hig.

**c)** Die Empfangsleistung ist dann zu gering (kleiner als  $-80$  dBm), wenn der Leistungsverlust durch den Lognormal-Term 40 dB oder mehr betr채gt. Der ver채nderliche Anteil  $V_S$  darf also nicht gr鰏er sein als 20 dB. Daraus folgt:

$$\Pr(\text{"System funktioniert nicht"}) = Q\left(\frac{20 \text{ dB}}{\sigma_S = 10 \text{ dB}}\right) = Q(2) \approx 0.02$$

$$\Rightarrow \Pr(\text{"System funktioniert"}) = 1 - 0.02 \approx \underline{\underline{98\%}}.$$

Die Grafik verdeutlicht das Ergebnis. Dargestellt ist hier die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{V_S}(V_S)$  des Pfadverlustes durch Shadowing (Lognormal-Fading). Die Wahrscheinlichkeit, dass das System ausf채llt, ist rot markiert.



**d)** Aus der Verf채gbarkeitswahrscheinlichkeit 99.9% folgt die Ausfallwahrscheinlichkeit  $10^{-3} \approx Q(3)$ . Verringert man den entfernungsabh채ngigen Pfadverlust  $V_0$  um 10 dB auf 70 dB, so kommt es erst dann zu einem Ausfall, wenn  $V_S \geq 50$  dB ist. Damit w채re genau die geforderte Zuverl채ssigkeit erreicht, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\Pr(\text{"System funktioniert nicht"}) = Q\left(\frac{120 - 70 - 20}{10}\right) = Q(3) \approx 0.001.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.2

a) Die Konstante  $k_1$  erzeugt den zeitunabhängigen Pfadverlust  $V_1 = 60$  dB. Daraus folgt:

$$k_1 = 10^{-V_1/(20 \text{ dB})} = \underline{10^{-3}}.$$

b) Richtig ist nur der zweite Lösungsvorschlag. Für die Gaußsche Zufallsvariable  $V_2$  sind (theoretisch) alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  möglich. Durch die Transformation  $z_2 = 10^{-V_2/20}$  ergeben sich für die lineare Zufallsgröße  $z_2$  nur positive Werte und zwar zwischen 0 (falls  $V_2$  positiv ist und bis ins Unendliche reicht) und  $+\infty$  (sehr große negative Werte von  $V_2$ ).

c) Die Zufallsgröße  $z_2$  kann nur positiv sein. Deshalb ist der WDF-Wert  $f_{z_2}(z_2 = 0)$  gleich Null. Der WDF-Wert für den Abszissenwert  $z_2 = 1$  erhält man durch Einsetzen in die gegebene Gleichung:

$$\begin{aligned} f_{z_2}(z_2 = 1) &= \frac{\exp[-\ln^2(z_2 = 1)/(2 \cdot C^2 \cdot \sigma_S^2)]}{\sqrt{2\pi} \cdot C \cdot \sigma_S \cdot (z_2 = 1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_S} \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 6 \text{ dB}} \cdot \frac{20 \text{ dB}}{\ln(10)} \approx \underline{0.578}. \end{aligned}$$

Der erste Anteil ist gleich dem WDF-Wert  $f_{V_2}(V_2 = 0)$  und C berücksichtigt den Betrag der Ableitung der nichtlinearen Kennlinie  $z_2 = g(V_2)$  für  $V_2 = 0$  dB bzw.  $z_2 = 1$ . Schließlich erhält man für  $z_2 = 2$ :

$$\begin{aligned} f_{z_2}(z_2 = 2) &= \frac{f_{z_2}(z_2 = 1)}{z_2 = 2} \cdot \exp\left[-\frac{\ln^2(2)}{2 \cdot C^2 \cdot \sigma_S^2}\right] = \\ &= \frac{0.578}{2} \cdot \exp\left[-\frac{0.48}{0.952}\right] \approx \underline{0.174}. \end{aligned}$$

d) Berücksichtigt man den Zusammenhang zwischen  $z_2$  und  $V_2$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(z_2 > 1) &= \Pr(V_2 < 0 \text{ dB}) = \underline{0.5}, \\ \Pr(z_2 > 0.5) &= \Pr(V_2 < 6 \text{ dB}) = 1 - \Pr(V_2 > 6 \text{ dB}) = \\ &= 1 - \Pr(V_2 > \sigma_S) = 1 - Q(1) = \underline{0.842}, \\ \Pr(z_2 > 4) &= \Pr(V_2 < -12 \text{ dB}) = \Pr(V_2 > +12 \text{ dB}) = \Pr(V_2 > 2\sigma_S). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gaußvariable größer ist als  $2 \cdot \sigma$ , ist aber gleich  $Q(2)$ :

$$\Pr(z_2 > 4) = Q(2) = \underline{0.023}.$$

e) Die erste Aussage ist mit Sicherheit nicht zutreffend, da sich der Mittelwert  $m_S$  auf die logarithmierte Empfangsleistung (in dBm) bezieht. Um zu klären, ob nun die zweite oder die dritte Lösungsalternative zutrifft, gehen wir von  $P_S = 1$  W,  $V_1 = 60$  dB  $\Rightarrow P_E' = 1$   $\mu$ W und folgender  $V_2$ -WDF aus:

$$f_{V_2}(V_2) = 0.5 \cdot \delta(V_2) + 0.25 \cdot \delta(V_2 - 10 \text{ dB}) + 0.25 \cdot \delta(V_2 + 10 \text{ dB}).$$

In der Hälfte der Zeit ist dann  $P_E(t) = 1$   $\mu$ W, während in den beiden anderen Vierteln jeweils gilt:

$$V_2 = +10 \text{ dB} : P_E(t) = \frac{1 \text{ W}}{10^7} = 0.1 \mu\text{W},$$

$$V_2 = -10 \text{ dB} : P_E(t) = \frac{1 \text{ W}}{10^5} = 10 \mu\text{W}.$$

Der Mittelwert ergibt somit:

$$E[P_E(t)] = 0.5 \cdot 1 \mu\text{W} + 0.25 \cdot 0.1 \mu\text{W} + 0.25 \cdot 10 \mu\text{W} = 3.025 \mu\text{W} > P_E' = 1 \mu\text{W}.$$

Diese einfache Rechnung mit diskreten Wahrscheinlichkeiten anstelle einer kontinuierlichen WDF deutet darauf hin, dass der dritte Lösungsvorschlag richtig sein wird.

**Musterlösung zur Aufgabe A1.3**

a) Aus  $\text{Max}[a(t)] = 2$  folgt direkt:

$$\text{Max} [20 \cdot \lg a(t)] = 20 \cdot \lg (2) \approx \underline{6 \text{ dB}}.$$

b) Der Maximalwert des Betragsquadrats  $p(t) = a(t)^2$  beträgt

$$\text{Max} [p(t)] = \text{Max} [a(t)^2] = \underline{4}.$$

Die logarithmische Darstellung des Betragsquadrats  $p(t)$  ist identisch mit der logarithmischen Darstellung des Betrags  $a(t)$ . Da  $p(t)$  eine Leistungsgröße ist, gilt

$$10 \cdot \lg p(t) = 10 \cdot \lg a(t)^2 = 20 \cdot \lg a(t).$$

Der Maximalwert ist somit ebenfalls ca. 6 dB.

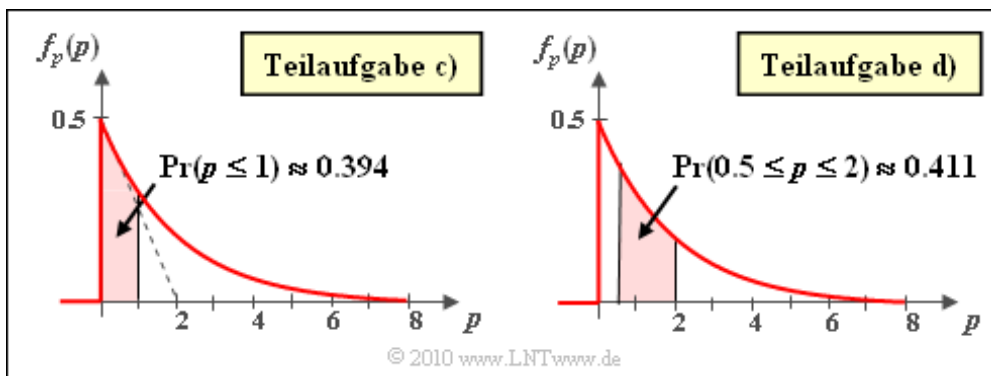
c) Die Bedingung  $a(t) \leq 1$  ist gleichbedeutend mit der Forderung  $p(t) = a(t)^2 \leq 1$ . Das Betragsquadrat ist bekanntermaßen exponentialverteilt, und für  $p \geq 0$  gilt demzufolge:

$$f_p(p) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{p}{2\sigma^2}\right].$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Pr(p(t) \leq 1) &= \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \int_0^1 \exp\left[-\frac{p}{2\sigma^2}\right] dp = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\right] = 0.394 \\ \Rightarrow \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\right] &= 0.606 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot \ln(0.606)} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 1}. \end{aligned}$$

Die linke nachfolgende Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(p(t) \leq 1)$ .



d) Aus  $10 \cdot \lg p_1 = -3 \text{ dB}$  folgt  $p_1 = 0.5$  und die obere Grenze des Integrationsbereichs ergibt sich aus der Bedingung  $10 \cdot \lg p_2 = +3 \text{ dB}$  zu  $p_2 = 2$ . Damit erhält man gemäß der rechten Grafik:

$$\begin{aligned} \Pr(-3 \text{ dB} \leq 10 \cdot \lg p(t) \leq +3 \text{ dB}) &= \int_{0.5}^2 f_p(p) dp = \left[-\exp\left[-\frac{p}{2\sigma^2}\right]\right]_{0.5}^2 = \\ &= e^{-0.25} - e^{-1} \approx 0.779 - 0.368 = \underline{0.411}. \end{aligned}$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.3

a) Richtig ist JA. Man erkennt auch hier die Rotationssymmetrie, wenn man berücksichtigt, dass hier nur  $N = 10.000$  Abtastwerte in der komplexen Ebene dargestellt wurden. Außerdem hätten bei NEIN die nachfolgenden Fragen keinen Sinn.

b) Durch Vermessen der beiden eingezeichneten Kreise erkennt man, dass beim blauen Kanal die Streuungen von Real- und Imaginärteil um etwa den Faktor 1.4 (exakt: Wurzel aus 2) größer sind als beim roten Kanal:

$$\sigma_B = \sigma_R \cdot \sqrt{2} = 0.5 \cdot \sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \approx \underline{0.707}.$$

c) Richtig ist NEIN. In beiden Fällen beschreibt  $f_\phi(\phi)$  eine Gleichverteilung zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$ . Die größeren Amplituden von Kanal (B) spielen für die Phasenfunktion  $\phi(t)$  keine Rolle.

d) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2. Bei Rayleigh-Fading sind Realteil  $x(t)$  und Imaginärteil  $y(t)$  gaußverteilt. Die Exponentialverteilung ergibt sich für das Betragsquadrat  $p(t) = |z(t)|^2$ .

e) Richtig ist hier der Lösungsvorschlag 3, wie bereits in der Musterlösung zu (d) begründet.

f) Der Betrag  $a(t)$  ist rayleighverteilt. Somit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr(a > A) = \int_A^\infty \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right] da.$$

In einigen Formelsammlungen findet man die Lösung für dieses Integral, aber nicht in allen. Es gilt aber auch mit der einseitig-exponentialverteilten Zufallsgröße  $p = a^2$ :

$$\Pr(a > A) = \Pr(p > A^2) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \int_{A^2}^\infty \exp\left[-\frac{p}{2\sigma^2}\right] dp.$$

Dieses Integral ist elementar und liefert das Ergebnis:

$$\Pr(a > A) = \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right].$$

Richtig ist demnach der Lösungsvorschlag 2.

g) Für den Kanal (R) gilt mit  $\sigma = 0.5$ :

$$\Pr(|z(t)| > 1) = e^{-2} \approx \underline{0.135}.$$

In der oberen Grafik auf der Angabenseite entspricht das der Anzahl aller Punkte, die außerhalb des eingezeichneten Kreises liegen, bezogen auf die Anzahl  $N = 10.000$  aller Punkte.

Für den Kanal (B) gilt wegen der doppelten Varianz  $\sigma^2 = 0.5$  dagegen  $\Pr(|z(t)| > 1) = e^{-1} \approx \underline{0.368}$ . Hinweis: Der Bezugskreis hat auch hier den Radius 1. Der im unteren Bild eingezeichnete Kreis hat einen größeren Radius als  $A = 1$ , nämlich  $A \approx 1.41$ .

## Musterlösung zur Aufgabe A1.4

a) Aus der WDF erkennt man, dass das WDF-Maximum für beide Kanäle gleich 0.6 ist und für  $a = 1$  auftritt. Die Rayleigh-WDF und ihre Ableitung lauten allgemein:

$$f_a(a) = \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right],$$
$$\frac{df_a(a)}{da} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right] - \frac{a^2}{\sigma^4} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right].$$

Durch Nullsetzen der Ableitung lässt sich zeigen, dass das WDF-Maximum bei  $a = \sigma$  auftritt. Da die Rayleigh-WDF für beide Kanäle gilt, folgt daraus:

$$\sigma_R = \sigma_B = \underline{1}.$$

b) Wegen der gleichen WDF ist auch die gesuchte Wahrscheinlichkeit für beide Kanäle gleich. Mit der angegebenen Gleichung erhält man hierfür:

$$\Pr(a \leq 0.316) = \Pr(20 \cdot \lg a \leq -10 \text{ dB}) = 1 - \exp\left[-\frac{0.316^2}{2\sigma^2}\right] = 1 - 0.951 \approx \underline{4.9\%}.$$

c) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2, 3 und 6:

- Die kleinere Geschwindigkeit  $v_B$  erkennt man daran, dass sich der Betrag  $|z(t)|$  bei der blauen Kurve langsamer ändert.
- Bei stehendem Fahrzeug entartet das LDS zu  $\Phi_z(f_D) = 2\sigma^2 \cdot \delta(f_D)$ , und es ist  $|z(t)| = A = \text{const.}$ , wobei die Konstante  $A$  entsprechend der Rayleighverteilung ausgewürfelt wird.
- Bei extrem hoher Geschwindigkeit wird das Jakes-Spektrum über einen immer größeren Bereich flach und immer kleiner; es nähert sich dann dem LDS von weißem Rauschen an. Allerdings müsste dazu  $v$  schon in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit sein.

d) Richtig sind hier die beiden Aussagen 2 und 3. Durch den Rayleigh-Parameter  $\sigma = 1$  liegt auch die „Leistung“  $E[|z(t)|^2] = 2\sigma^2 = 2$  des Zufallsprozesses fest. Somit gilt sowohl für (R) als auch für (B):

$$\varphi_z(\Delta t = 0) = 2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_z(f_D) df_D = 2.$$



## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.4

**a)** Bei der Fahrtrichtung (A) nähert sich der Empfänger dem Sender unter dem Winkel  $\alpha = 0$ . Damit ergibt sich nach der relativistischen Gleichung (1):

$$f_E = f_S \cdot \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} \Rightarrow f_D = f_E - f_S = f_S \cdot \left[ \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{f_D}{f_S} = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} - 1.$$

Mit  $v_1/c = 0.6$  erhält man:

$$\frac{f_D}{f_S} = \frac{\sqrt{1 - 0.6^2}}{1 - 0.6} - 1 = \frac{0.8}{0.4} - 1 \underline{\underline{= 1}} \Rightarrow f_E/f_S = 2.$$

Entsprechend gilt mit  $v_2/c = 10^{-5}$ :

$$\frac{f_D}{f_S} = \frac{\sqrt{1 - (10^{-5})^2}}{1 - (10^{-5})} - 1 \approx 1 + 10^{-5} - 1 \underline{\underline{= 10^{-5}}} \Rightarrow f_E/f_S = 1.00001.$$

**b)** Nun entfernt sich der Empfänger vom Sender ( $\alpha = 180^\circ$ ). Die Empfangsfrequenz  $f_E$  ist kleiner als die Sendefrequenz  $f_S$  und die Dopplereffrequenz  $f_D$  negativ. Mit  $\cos(\alpha) = -1$  erhält man nun:

$$\frac{f_D}{f_S} = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v/c} - 1 = \begin{cases} -0.5 & \text{für } v_1/c = 0.6 \\ -10^{-5} & \text{für } v_2/c = 10^{-5} \end{cases}.$$

Umgerechnet auf  $f_E/f_S$  ergibt sich:

$$\frac{f_E}{f_S} = \begin{cases} 0.5 & \text{für } v_1/c = 0.6 \\ 0.99999 & \text{für } v_2/c = 10^{-5} \end{cases}.$$

**c)** Hier gelten folgende Gleichungen:

$$f_E = f_S \cdot \left[ 1 + \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha) \right] \Rightarrow \frac{f_D}{f_S} = \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha).$$

Daraus ergeben sich folgende Zahlenwerte:

- Richtung (A),  $v_1/c = 1.8 \cdot 10^8$  m/s:  $f_D/f_S \underline{\underline{= 0.6}} \Rightarrow f_E/f_S = 1.6,$
- Richtung (A),  $v_2/c = 3.0 \cdot 10^3$  m/s:  $f_D/f_S \underline{\underline{= 10^{-5}}} \Rightarrow f_E/f_S = 1.00001,$
- Richtung (B),  $v_1/c = 1.8 \cdot 10^8$  m/s:  $f_D/f_S \underline{\underline{= -0.6}} \Rightarrow f_E/f_S = 0.4,$
- Richtung (B),  $v_2/c = 3.0 \cdot 10^3$  m/s:  $f_D/f_S \underline{\underline{= -10^{-5}}} \Rightarrow f_E/f_S = 0.99999.$

Man erkennt, dass für realistische Geschwindigkeiten – dazu rechnen wir auch  $v \approx 10000$  km/h – die herkömmliche Gleichung (2) bis hin zur Genauigkeit eines Taschenrechners das gleiche Ergebnis liefert wie die relativistische Gleichung (1). Mit der Näherung liefern die Winkel  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = 180^\circ$  den gleichen Betrag der Dopplereffrequenz. Die Näherungen unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Bei der

relativistischen Gleichung ist diese Symmetrie nicht mehr gegeben (siehe Teilaufgaben a und b).

**d)** Gleichung (2) führt hier zum Ergebnis:

$$f_D = f_E - f_S = f_S \cdot \frac{v_3}{c} \cdot \cos(\alpha).$$

- Die Fahrtrichtung (C) verläuft senkrecht ( $\alpha = 90^\circ$ ) zur Verbindungslinie Sender–Empfänger. In diesem Fall tritt keine Dopplerverschiebung auf:  $f_D \equiv 0$ .
- Die Bewegungsrichtung (D) ist durch  $\alpha = -135^\circ$  charakterisiert. Daraus resultiert:

$$f_D = 2 \cdot 10^9 \text{ Hz} \cdot \frac{30 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot \cos(-135^\circ) \approx \underline{\underline{-141 \text{ Hz}}}.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A1.5

a) Das Jakes-Spektrum des Realteils ist halb so groß wie das resultierende Spektrum  $\Phi_z(f)$ :

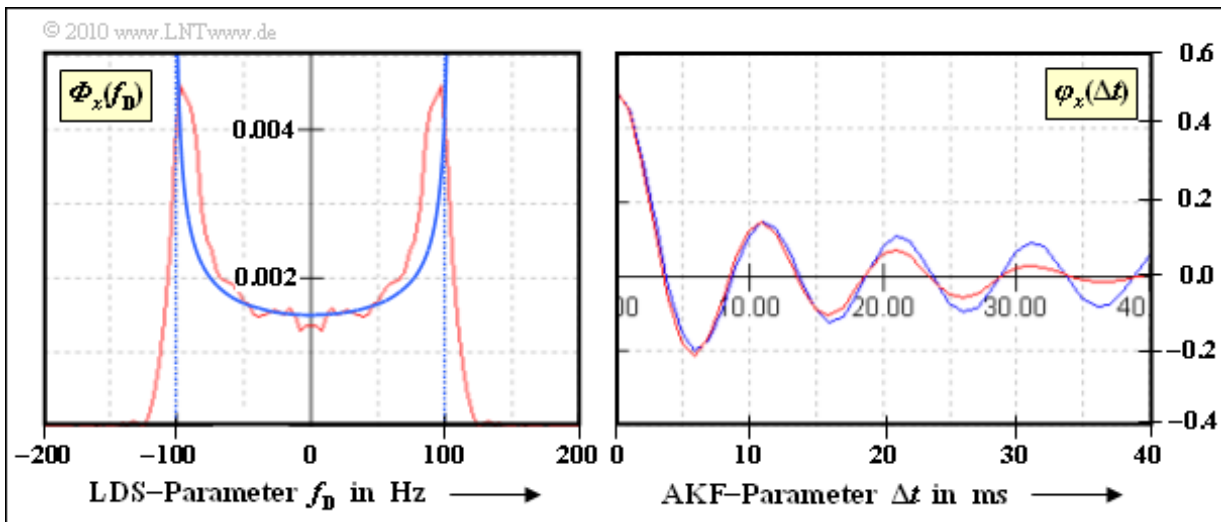
$$\begin{aligned} \Phi_x(f_D = 0) &= \Phi_y(f_D = 0) = \frac{\Phi_z(f_D = 0)}{2} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\pi \cdot f_{D, \max}} = \frac{0.5}{\pi \cdot 100 \text{ Hz}} \approx 1.59 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}^{-1}. \end{aligned}$$

b) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2. Das Eingangssignal  $n(t)$  besitzt ein weißes (konstantes) LDS  $\Phi_n(f_D)$ . Für das LDS am Ausgang gilt dann

$$\Phi_x(f_D) = \Phi_n(f_D) \cdot |H_{DF}(f_D)|^2.$$

c) Richtig ist der letzte Lösungsvorschlag. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, hat das Signal  $x(t)$  die gleiche Varianz  $\sigma^2$  wie das Rauschsignal  $n(t)$ .

d) Richtig ist NEIN. Die beiden Bedingungen nach den Teilaufgaben (b) und (c) beziehen sich nur auf die Betragsfunktion. Für die Phase des digitalen Filters gibt es keine Vorschrift. Diese ist frei wählbar. Meist wählt man diese so, dass sich ein minimalphasiges Netzwerk ergibt. In diesem Fall hat dann die Impulsantwort  $h_{DF}(t)$  die geringst mögliche Ausdehnung.



Die Grafik zeigt das Ergebnis einer solchen Approximation. Die roten Kurven wurden simulativ über 100.000 Abtastwerte ermittelt. Man erkennt:

- Das Jakes-Leistungsdichtespektrum (linke Grafik) lässt sich aufgrund des senkrechten Abfalls bei  $\pm f_{D, \max}$  nur sehr ungenau nachbilden.
- Für den Zeitbereich bedeutet dies, dass die AKF sehr viel schneller abfällt, als es die Theorie besagt. Für kleine  $\Delta t$ -Werte ist die Approximation aber sehr gut (rechte Grafik).

## Musterlösung zur Aufgabe A1.6

- a) Das *Rayleigh-Fading* ergibt sich aus dem *Rice-Fading* mit  $|z_0|^2 = 0$ .
- b) Es ist offensichtlich, dass
- $f_x(x)$  von  $x_0$  abhängt,
  - $f_y(y)$  von  $y_0$  abhängt,
  - $f_\phi(\phi)$  vom Verhältnis  $y_0/x_0$  abhängt.

Die angegebene Gleichung für die WDF  $f_a(a)$  zeigt, dass der Betrag  $a$  nur von  $|z_0|$  abhängt.

Für die AKF gilt mit  $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_z(\Delta t) &= E [z(t) \cdot z^*(t + \Delta t)] = \\ &= E [(x(t) + j \cdot y(t)) \cdot (x(t + \Delta t) - j \cdot (y(t + \Delta t))]. \end{aligned}$$

Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil kann man die Gleichung wie folgt vereinfachen:

$$\varphi_z(\Delta t) = E [x(t) \cdot x(t + \Delta t)] + E [y(t) \cdot y(t + \Delta t)].$$

Der erste Anteil ergibt mit  $x(t) = u(t) + x_0$  und  $t' = t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} E [x(t) \cdot x(t')] &= E [u(t) \cdot u(t')] + x_0 \cdot E [u(t)] + x_0 \cdot E [u(t')] + x_0^2, \\ \Rightarrow E [x(t) \cdot x(t + \Delta t)] &= E [u(t) \cdot u(t + \Delta t)] + x_0^2 = \varphi_u(\Delta t) + x_0^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass die Gaußsche Zufallsgröße  $u(t)$  mittelwertfrei ist und die Varianz  $\sigma^2$  besitzt.

In gleicher Weise erhält man mit  $y(t) = v(t) + y_0$ :

$$\begin{aligned} E [y(t) \cdot y(t + \Delta t)] &= \dots = \varphi_v(\Delta t) + y_0^2 \\ \Rightarrow \varphi_z(\Delta t) &= \varphi_u(\Delta t) + \varphi_v(\Delta t) + x_0^2 + y_0^2 = 2 \cdot \varphi_u(\Delta t) + |z_0|^2. \end{aligned}$$

Wenn aber die AKF  $\varphi_z(\Delta t)$  nur von  $|z_0|^2$  abhängt, dann gilt dies auch für die Fouriertransformierte „LDS“. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 3, 5 und 6.

- c) Der quadratische Mittelwert könnte zum Beispiel aus der Betrags-WDF berechnet werden:

$$E [|z(t)|^2] = E [a^2] = \int_0^\infty a^2 \cdot f_a(a) da.$$

Gleichzeitig ist der quadratische Mittelwert – also die Leistung – auch durch die AKF bestimmt:

$$E [|z(t)|^2] = \varphi_z(\Delta t = 0) = 2 \cdot \varphi_u(\Delta t = 0) + |z_0|^2 = 2 \cdot \sigma^2 + |z_0|^2.$$

Mit  $\sigma = 1$  erhält man somit folgende numerische Ergebnisse:

$$\begin{aligned} |z_0|^2 = 0 & : E [|z(t)|^2] = 2 + 0 = \underline{2}, \\ |z_0|^2 = 2 & : E [|z(t)|^2] = 2 + 2 = \underline{4}, \\ |z_0|^2 = 10 & : E [|z(t)|^2] = 2 + 10 = \underline{12}. \end{aligned}$$

**d)** Richtig ist der Lösungsvorschlag 1, wie bereits in der Musterlösung zu (b) hergeleitet. Richtig wären die folgenden Aussagen:

- Die „blaue“ AKF liegt um 4 über der „schwarzen“.
- Die „grüne“ AKF liegt um 6 über der „blauen“.

**e)** Alle Lösungsvorschläge treffen zu.

- Das „schwarze“ LDS ist ein **Jakes–Spektrum** und damit auch kontinuierlich, das heißt, innerhalb eines Intervalls sind alle Frequenzen vorhanden.
- In der Autokorrelationsfunktion (AKF) des blauen bzw. des grünen Kanals tritt zusätzlich die Konstante  $|z_0|^2$  auf.
- Im Leistungsdichtespektrum (LDS) ergeben sich wegen dieser Konstanten in der AKF jeweils Diracfunktionen bei der Dopplerfrequenz  $f_D = 0$  mit dem Gewicht  $|z_0|^2$ .

## Musterlösung zur Aufgabe Z1.6

a) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2. Der erste Vorschlag liefert ein *Rayleigh-Fading*-Modell. Mit der letzten Einstellung ergäbe sich:

$$|z(t)| = j \Rightarrow r(t) = s(t) \cdot z(t) = j \cdot s(t).$$

Berücksichtigen wir, dass wir uns im äquivalenten Tiefpassbereich befinden, so würde dann bei einem cosinusförmigen Eingang ein minus-sinusförmiges Ausgangssignal  $r_{BP}(t)$  auftreten. Dagegen gilt mit dem Lösungsvorschlag 2 für alle möglichen Signale:

$$|z(t)| = x_0 = 1 \Rightarrow r(t) = s(t).$$

b) Beim gegebenem *Rayleigh-Fading* beträgt der Parameter  $\sigma^2 = 0.5$ . Damit ergibt sich für den quadratischen Mittelwert des multiplikativen Faktors  $z(t)$ :

$$E[|z(t)|^2] = 2\sigma^2 = 1.$$

Das *Rice-Fading* soll genau die gleiche Leistung besitzen. Das heißt, es soll gelten:

$$|z_0|^2 + 2\sigma^2 = 1.$$

Weiterhin wurde gefordert:

- Das Verhältnis der Leistungen von deterministischem Anteil ( $|z_0|^2$ ) und stochastischem Anteil ( $2\sigma^2$ ) sei 4. Daraus folgt:

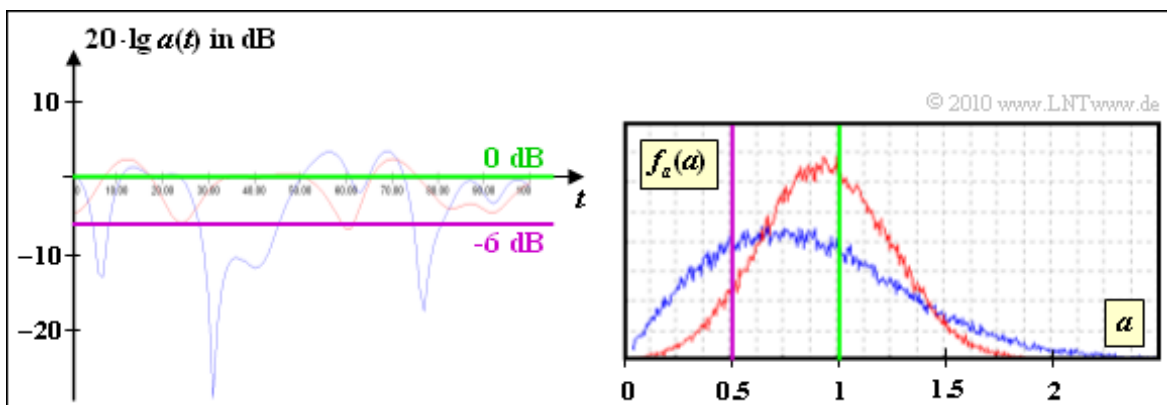
$$2\sigma^2 = 0.2 \Rightarrow \sigma^2 = 0.1 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.316,$$

$$|z_0|^2 = 0.8 \Rightarrow |z_0| = 0.894.$$

- Die Aufteilung von  $z_0 = x_0 + j \cdot y_0$  ergibt sich aus der Grafik. Man erkennt, dass  $y_0 = x_0$  sein muss (Mittelpunkt der Wolke im ersten Quadranten unter  $45^\circ$ ):

$$x_0 = y_0 = \frac{|z_0|}{\sqrt{2}} = \frac{0.894}{\sqrt{2}} \approx 0.632.$$

c) Der Bereich „ $20 \cdot \lg |z(t)| \leq -6 \text{ dB}$ “ ist gleich bedeutend mit „ $|z(t)| \leq 0.5$ “. Dieser Bereich ist in der Grafik vorne durch den violetten Kreis markiert. Man erkennt daraus, dass die Aussage 1 richtig ist, da sich bei Rayleigh mehr Punkte innerhalb des violetten Kreises befinden.



Diese Grafik zeigt das Ergebnis einer Systemsimulation mit dem Programm „Mobilfunkkanal“ aus dem

Praktikum [Söd01]. Sowohl aus dem Signalausschnitt als auch aus der WDF erkennt man, dass die blaue Kurve (Rayleigh) mehr Anteile unter der violetten Kurve besitzt als die rote Kurve (Rice).

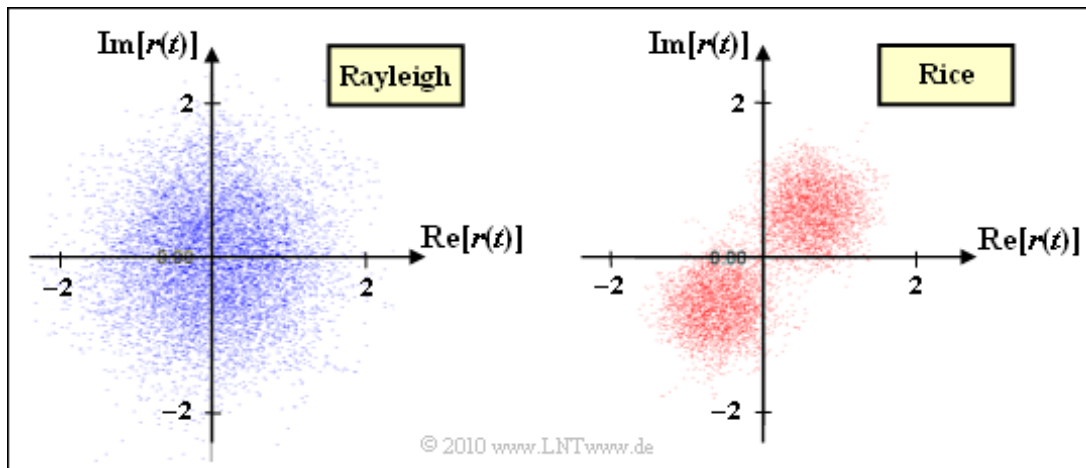
d) Richtig ist Lösungsvorschlag 3. Für die Rayleighverteilung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr(20 \cdot \lg a(t) \leq 0 \text{ dB}) = \Pr(a(t) \leq 1) = 1 - e^{-1} \approx 63 \text{ \%}.$$

Aus obiger Grafik ist zu erkennen, dass sich für die Riceverteilung (mit den hier gewählten Parametern) etwa die gleiche Unterschreitungswahrscheinlichkeit ergibt. Auch aus der komplexen Darstellung von  $z(t)$  auf der Angabenseite ist dieses Ergebnis zu errahnen (leichter dann, wenn man das Ergebnis schon kennt), unter anderem deshalb, weil die Spitze der Gaußwolke noch innerhalb des grünen Kreises liegt.

e) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3:

- Bei *Rice-Fading* liegt die Punktwolke von  $z(t)$  im ersten Quadranten. Multipliziert man  $z(t)$  mit  $s(t) = \pm 1$ , so erhält man zwei Punktwolken im ersten und dritten Quadranten. An der WDF  $f_a(a)$  des Betrags ändert sich dadurch nichts.
- Auch beim *Rayleigh-Fading* weisen die Dichtefunktionen  $f_a(a)$  des Betrags für  $|z(t)|$  und  $|r(t)|$  keine Unterschiede auf. Da zudem die Phase  $\phi$  gleichverteilt ist, ergeben sich im Endergebnis auch die gleichen Punktwolken.



Betrachtet man allerdings die Entstehung der komplexen Darstellung von  $z(t)$  und  $r(t)$  dynamisch, so gibt es sehr wohl Unterschiede. Bei der komplexen Darstellung von  $r(t)$  treten größere Sprünge auf, immer dann, wenn es im Sendesignal  $s(t)$  zu Phasensprüngen um  $\pm 180^\circ$  kommt, also bei Symbolwechseln. Somit unterscheiden sich auch  $\Phi_z(f_D)$  und  $\Phi_r(f_D)$  – letzteres ist breiter – und dementsprechend auch die zugehörigen Autokorrelationsfunktion.

## Musterlösung zur Aufgabe A1.7

a) Mit  $|z_0| = 2$  und  $\sigma = 2$  lässt sich die Rice-WDF wie folgt darstellen

$$f_a(a) = a \cdot \exp\left[-\frac{a^2 + 4}{2}\right] \cdot I_0(2a).$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Werte:

$$\begin{aligned} f_a(a = 1) &= 1 \cdot e^{-2.5} \cdot I_0(2) = 0.082 \cdot 2.28 = \underline{0.187}, \\ f_a(a = 2) &= 2 \cdot e^{-4} \cdot I_0(4) = 2 \cdot 0.0183 \cdot 11.3 = \underline{0.414}, \\ f_a(a = 3) &= 3 \cdot e^{-6.5} \cdot I_0(6) = 3 \cdot 0.0015 \cdot 67.23 = \underline{0.303}. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse passen gut zu der blauen Kurve auf der Angabenseite.

b) Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) erhält man:

$$\Pr(a \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot 0.187 \approx \underline{9.5\%}.$$

Dieses Ergebnis wird etwas zu groß sein, da die blaue Kurve unterhalb der Verbindungslinie von (0, 0) nach (1, 0.187) liegt  $\Rightarrow$  konvexer Kurvenverlauf.

c) Der WDF-Wert  $f_a(a = 1) \approx 0.35$  kann aus der **Grafik** abgelesen werden. Daraus folgt:

$$\Pr(a \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot 0.35 \approx \underline{17.5\%}.$$

Dieser Wahrscheinlichkeitswert wird etwas zu klein sein, da die rote Kurve im Bereich zwischen 0 und 1 konkav verläuft.

d) Die Gaußnäherung besagt, dass man die Riceverteilung durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert  $|z_0| = 3.16$  und Streuung  $\sigma = 1$  annähern kann, wenn der Quotient  $|z_0|/\sigma$  hinreichend groß ist. Dann gilt:

$$\Pr(a \leq 1) \approx \Pr(g \leq -2.16) = Q(2.16) \approx \underline{1.5\%}.$$

Hierbei bezeichnet  $g$  eine gaußverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert 0 und der Streuung  $\sigma = 1$ . Der Zahlenwert wurde mit dem angegebenen **Flash-Modul** ermittelt.

Anmerkung: Die Gaußnäherung ist hier sicher mit einem gewissen Fehler verbunden. Aus der Grafik erkennt man, dass der Mittelwert der grünen Kurve nicht bei  $a = 3.16$  liegt, sondern eher bei 3.31. Dann ist die Leistung der Gaußnäherung ( $3.31^2 + 1^2 = 12$ ) genau so groß wie die der Riceverteilung:

$$|z_0|^2 + 2\sigma^2 = 10 + 2 = 12.$$

e) Nach gleichem Rechenweg ersetzt man hier die Rice-WDF durch eine Gauß-WDF mit Mittelwert  $20^{0.5} \approx 4.47$  und Streuung  $\sigma = 1$  und man erhält

$$\Pr(a \leq 1) \approx \Pr(g \leq -3.37) = Q(3.37) \approx 0.04\%.$$

Geht man von der leistungsgleichen Gaußverteilung aus (siehe Anmerkung zur letzten Aufgabe), so ergibt sich der Mittelwert zu  $m_g = 21^{0.5} \approx 4.58$ , und die Wahrscheinlichkeit wäre dann

$$\Pr(a \leq 1) \approx Q(3.58) \approx \underline{0.02\%}.$$